

Егармина Л. Н.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА ДВОЙНОЙ ПЕРЕСТРОЙКИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Проанализирован полученный в предыдущих работах новый эффект двойной перестройки нестационарной волны, которая возникает в стержне прямоугольного поперечного сечения во время динамической продольной нагрузки. Показанная картина получена на основе исследования трехмерных динамических уравнений теории упругости и соответствует процессам, которые происходят вблизи фронта нестационарной волны.

Ключевые слова: асимптотико-групповой, динамическая нагрузка, фронт волны, квазифронт, нестационарная волна.

1. Введение

Анализ волновых процессов и физических закономерностей колебательного движения упругих конструкций имеет большое теоретическое и практическое значение, благодаря чему эти задачи достигли большого развития [1–4].

Трехмерные динамические уравнения теории упругости наиболее полно описывают напряженно-деформированное состояние тел во время приложения к ним динамических нагрузок разного типа. Однако получать решения таких уравнений, как правило, удается только после наложения на исследуемые процессы предварительных допущений или условий, или же после дополнительных исследований, уточняющих и тем самым упрощающих исходную математическую постановку.

В работах [5, 6] динамические уравнения теории упругости подвергались алгоритмизированному способу исследований (метод асимптотико-группового анализа) для получения уточненных уравнений стержней. Полученные уравнения хорошо согласуются с основным принципиальным условием — сохранить трёхмерность напряженно-деформированного состояния конструкции. Благодаря этому были получены новые интересные результаты. В частности, эффект двойной перестройки нестационарной продольной волны возникающий вблизи ее фронта при динамическом нагружении стержня.

В отличие от указанных уточненных уравнений, решения известных моделей динамики недостаточно точно описывают подобные нестационарные волны. Они либо задают неправильные скорости распространения фронтов волн, либо описывают бесконечную скорость распространения возмущения [1, 2, 7].

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Метод асимптотико-группового анализа, используемый в работе [8] позволил построить уточненную математическую модель обобщенного плоского напряженного состояния пластины.

Комбинация двух взаимоперпендикулярных таких состояний была использована в работе [5] для полу-

чения известных динамических уравнений продольной деформации стержня. При этом метод асимптотико-группового анализа, позволил отказаться от каких-либо предварительных догадок и гипотез, заранее упрощающих исследование.

В работах [8–10] данный метод использовался для построения уточненных динамических уравнений обобщенного плоского напряженного состояния пластин, учитывающих поперечные колебания. Исследования показали, что в динамических задачах существенную роль могут играть некоторые трехмерные факторы, которые не учитываются классическими уравнениями [1, 2, 7], в частности, поперечные колебания, возникающие при движении продольной волны.

Здесь проанализирован полученный в [5, 6] новый эффект двойной перестройки возмущения в прифронтной зоне нестационарной продольной волны в стержне.

3. Объект, цель и задачи исследования

Объект исследования — уточненные динамические уравнения продольной деформации стержня для случая прямоугольного поперечного сечения конструкции.

Целью работы является анализ прифронтной зоны нестационарной продольной волны, которая возникает во время динамического нагружения полубесконечного стержня прямоугольного поперечного сечения.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

1. Получить графическую картину распространения нестационарной волны в стержне.
2. Выполнить подробный анализ полученной картины прифронтной зоны.

4. Математическая модель продольной деформации стержня прямоугольного сечения

В работе [6] подробно описана процедура получения уточненных динамических уравнений продольной деформации стержня (1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} &= 0, \\ V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW + \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, P = \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW.$$

Применяя метод асимптотико-группового анализа к данной системе, в работе [6] также были получены классические динамические уравнения продольной деформации стержней в безразмерной форме:

$$b_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, P = b_1^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

$$b_1^2 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} = \frac{a_1^2}{a_p^2}, a_1^2 = \frac{E}{\rho}, a_p^2 = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Здесь величина a_p — это скорость распространения продольных волн в трехмерной упругой среде. Величина a_1 — это скорость распространения продольных волн в стержне по классической теории стержней. Отсюда делаем вывод, что величина b_1 — это безразмерная скорость распространения данных волн, отнесенная к скорости a_p .

Можем сделать вывод, что полученные уточненные уравнения описывают распространение фронта волны с «трехмерной» скоростью; при этом в качестве частного упрощенного случая, они содержат известные одномерные динамические уравнения. Также уравнения учитывают поперечные колебания стержня во время внезапного приложения к нему продольной нагрузки.

Рассмотрим случай, когда $h_2 \neq h_3$, что соответствует прямоугольному поперечному сечению стержня. Значение дроби h_2/h_3 может быть малым или большим.

Считая, что значение этой дроби мало, отбросим во втором уравнении (1) слагаемое с квадратом дроби, получая:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0; V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW = 0;$$

$$W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0; P = \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW.$$

Выражая из второго уравнения величину V и подставляя в остальные уравнения, имеем:

$$b_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu b_2^2 \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0; b_2^2 W + \nu b_2^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0; \quad (3)$$

$$P = b_2^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu b_2^2 W; b_2^2 = \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}.$$

Величина b_2 равна отношению:

$$b_2 = \frac{a_2}{a_p}, a_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, a_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}. \quad (4)$$

Величина a_p , как было указано ранее — это скорость распространения продольных волн в трехмерной упругой среде. Величина a_2 равна скорости распространения двумерных продольных волн в пластине в рамках обобщенного плоского напряженного состояния [8]. Таким образом, величина b_2 — это безразмерная скорость распространения продольных волн в пластине.

Поиск решения уравнений (3), как и в работе [6], выполняется с помощью процедуры последовательных приближений. Для этого представим искомые функции в виде рядов:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i, W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i, P = \sum_{i=1}^{\infty} P_i. \quad (5)$$

Члены этих рядов удовлетворяют рекуррентной системе уравнений:

$$\begin{aligned} b_2^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \nu b_2^2 \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} &= 0; \\ b_2^2 W_{i-1} + \nu b_2^2 \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2} &= 0; \\ P_i = b_2^2 \frac{\partial u_i}{\partial x} + \nu b_2^2 W_{i-1}, \quad (i=1,2,\dots). \end{aligned} \quad (6)$$

Решение данных уравнений разыскиваем в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=1}^i u_{i,j} x^{i-j} (b_2 \tau - x)^{\gamma+i+j-1}, \\ P_i &= \sum_{j=1}^i P_{i,j} x^{i-j} (b_2 \tau - x)^{\gamma+i+j-2}, \\ W_i &= \sum_{j=1}^i W_{i,j} x^{i-j} (b_2 \tau - x)^{\gamma+i+j}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) получаем рекуррентные уравнения для поиска коэффициентов сумм (8):

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{1}{2b_2^2(i-j)(\gamma+i+j-1)} \left[b_2^2(i-j+1)(i-j)u_{i,j-1} + \right. \\ &\quad \left. + \nu b_2^2((i-j)W_{i-1,j-1} - (\gamma+i+j-1)W_{i-1,j}) \right], \\ (i=2,3,\dots; j=1,\dots,i-1); \\ W_{i,j} &= -\frac{8}{b_2^2(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ b_2^2 W_{i-1,j-1} + \right. \\ &\quad \left. + \nu b_2^2[(i-j+1)u_{i,j-1} - (\gamma+i+j-1)u_{i,j}] \right\}, \\ (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$P_{i,j} = b_2^2 [(i-j+1)u_{i,j-1} - (\gamma+i+j-1)u_{i,j}] + vb_2^2 W_{i-1,j-1},$$

$$(i=1,2,\dots; j=1,\dots,i). \quad (8)$$

Из этих зависимостей можно получить все коэффициенты, кроме $u_{i,i}$. Учитывая граничные условия для случая внезапно приложенной и остающейся в дальнейшем постоянной нагрузки $F_1=1, F_i=0 (i>1), \gamma=0$, а также с учетом, что $P_{i,i}=F_i (i=1,2,\dots)$, получим формулу для недостающих коэффициентов с учетом выражений для $P_{i,j}$ из (8):

$$u_{i,i} = \frac{1}{\gamma+2i-1} \times \left[u_{i,i-1} - \frac{F_i}{b_2^{2(\gamma+2i-1)}} + vW_{i-1,i-1} \right],$$

$$(i=1,2,\dots). \quad (9)$$

В итоге автор статьи имеет все необходимые расчетные формулы для произведения вычислений. Эти вычисления необходимо выполнять для фиксированного значения τ с изменением x в диапазоне $0 \leq x \leq b_2\tau$ с некоторым небольшим шагом. Полученные результаты используются для построения графиков волны $P(x)$ для заданного значения времени. Картина распространения волны отслеживается посредством изменения безразмерного времени τ .

На рис. 1–4 изображены графики распространения волны $P(x)$ для случая внезапно приложенной постоянной продольной нагрузки, равной единице при разных значениях величины безразмерного времени τ .

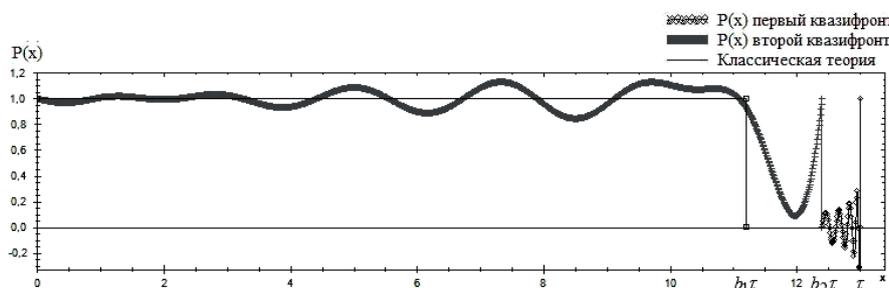


Рис. 1. Распространение волны в стержне $P(x)$ для значений $h_2/h_3 = 0,2; t = 13$

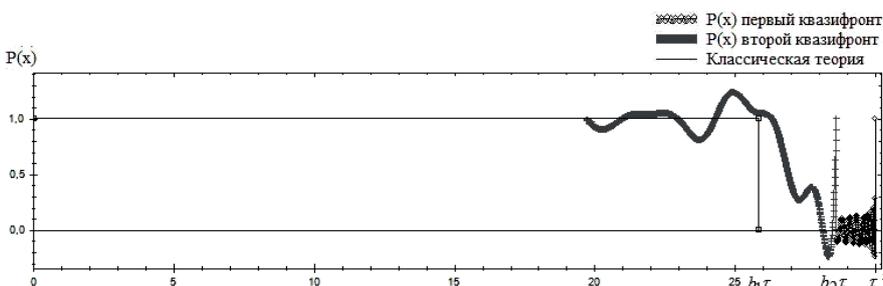


Рис. 2. Распространения волны в стержне $P(x)$ для значений $h_2/h_3 = 0,2; t = 30$

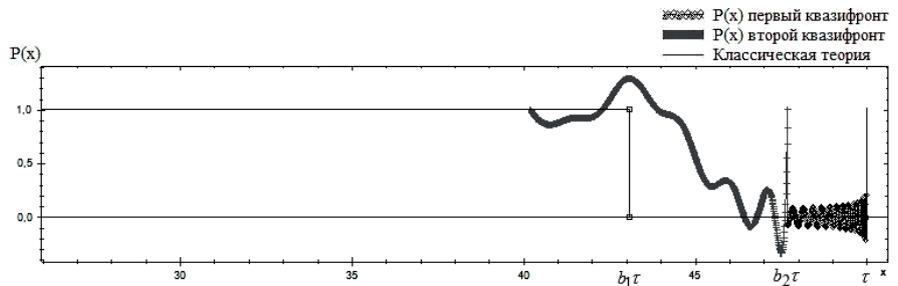


Рис. 3. Распространения волны в стержне $P(x)$ для значений $h_2/h_3 = 0,2; t = 50$

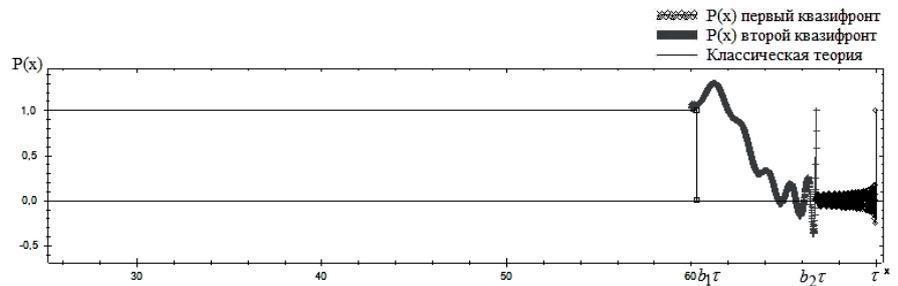


Рис. 4. Распространения волны в стержне $P(x)$ для значений $h_2/h_3 = 0,2; t = 70$

5. Обсуждение результатов исследования продольной деформации стержня прямоугольного сечения

На графиках (рис. 1–4) отчетливо видно, что волна, появляющаяся в стержне после приложения нагрузки, имеет сложный характер. Вблизи первого фронта $x = \tau$, распространяющегося со скоростью трехмерных продольных волн, имеем быстроизменяющийся процесс, быстро затухающий с удалением от фронта.

В точке $x = b_2\tau$ образуется квазифронт перехода от двумерного напряженно-деформированного состояния в трехмерное. Данная зона характеризуется значительно более медленным осциллирующим процессом из которого далее, при помощи еще одного квазифронта, происходит окончательный переход от двумерного состояния в одномерное.

Это одномерное состояние представляет решение классических динамических уравнений продольной нагрузки стержня. Автор статьи показывает, что в действительности классическое решение описывает не фронт нестационарной волны, а очередную квазифронт $x = b_1\tau$, с помощью которого происходит последняя перестройка.

Аналогичные результаты были получены для пластин в работе [8]. Они интересны сами по себе, так как иллюстрируют двухступенчатый процесс перехода от трехмерного напряженного состояния к одномерному и показывают роль самоуравновешенных колебаний при образовании квазифронтов [3].

6. Выводы

Таким образом, получена графическая картина распространения нестационарной волны в стержне прямоугольного сечения. Она позволила исследовать прифронтовую зону и выявить новые трехмерные эффекты вблизи нее.

Проанализировано сложное явление двойной перестройки волнового процесса в стержне прямоугольного поперечного сечения, в процессе которого последовательно чередуются трехмерные, двумерные и одномерные явления. Общеизвестные одномерные результаты оказываются медленно изменяющейся асимптотикой для сложного пространственного процесса.

Литература

1. Бабаков, И. М. Теория колебаний [Текст] / И. М. Бабаков. — М.: Наука, 1968. — 559 с.
2. Векуа, И. Н. К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями [Текст] / И. Н. Векуа // Тр. Тбилисс. Геофизич. Ин-та. — 1937. — Т. 2. — С. 23–50.
3. Слепян, Л. И. Нестационарные упругие волны [Текст] / Л. И. Слепян. — Л.: Судостроение, 1972. — 376 с.
4. Шамровський, О. Д. Дискретна модель поширення нестационарної подовжньої хвилі в пружному стержні [Текст] / О. Д. Шамровський, А. І. Веселов, Ю. О. Лимаренко // Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні. — 2008. — № 1. — С. 98–102.
5. Шамровський, А. Д. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости [Текст] / А. Д. Шамровський, Л. Н. Егармина // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. — 2009. — № 2. — С. 111–115.
6. Шамровський, А. Д. Моделирование распространения продольной волны в стержне с помощью уточненных динамических уравнений [Текст] / А. Д. Шамровський, Л. Н. Егармина // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. — 2010. — № 2. — С. 139–145.
7. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С. П. Тимошенко. — М.: Наука, 1967. — 444 с.
8. Шамровський, А. Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости [Текст] / А. Д. Шамровський. — Запорожье: ЗГИА, 1997. — 169 с.
9. Скрышник, И. А. Двумерное моделирование трехмерных продольных волн в плоском слое [Текст] / И. А. Скрышник, А. Д. Шамровський // Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства. — Запорожье, 1995. — С. 43–50.
10. Скрышник, И. А. Графическое моделирование волновых процессов в пластинах и оболочках [Текст]: тез. докл. Междунар. конф. / И. А. Скрышник, А. Д. Шамровський // Современные проблемы геометрического моделирования. — Мелитополь, 1995. — 164 с.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТУ ПОДВІЙНОЇ ПЕРЕБУДОВИ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ПОВЗДОВЖНЬОЇ ХВИЛІ У СТЕРЖНІ ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕРІЗУ

Проаналізовано отриманий у попередніх роботах новий ефект подвійної перебудови нестационарної хвилі, яка виникає у стержні прямокутного поперечного перерізу під час динамічного повздовжнього навантаження. Показана картина отримана на основі дослідження тривимірних динамічних рівнянь теорії пружності і відповідає процесам, що відбувається поблизу фронту нестационарної хвилі.

Ключові слова: асимптотико-груповий, динамічне навантаження, фронт хвилі, квазіфронт, нестационарна хвиля.

Егарміна Лариса Николаевна, кандидат технических наук, доцент, и. о. заведующего кафедрой высшей и прикладной математики, Запорожская государственная инженерная академия, Украина, e-mail: l.yegarmina@gmail.com.

Егарміна Лариса Миколаївна, кандидат технічних наук, доцент, в. о. завідувача кафедри вищої та прикладної математики, Запорізька державна інженерна академія, Україна.

Yegarmina Larisa, Zaporozhye State Engineering Academy, Ukraine, e-mail: l.yegarmina@gmail.com

УДК 66.023.2

DOI: 10.15587/2312-8372.2015.41070

**Мірошниченко Ю. А.,
Безносик Ю. О.,
Бондаренко О. С.**

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В МІКРОРЕАКТОРАХ

В даній роботі проведено огляд літературних даних по застосуванню мікроструктурних реакторів для оптимізації хіміко-технологічних процесів та реакцій, детальний опис яких можливий з використанням сучасних методів та засобів моделювання. На основі встановлених техніко-економічних переваг мікросистемних приладів доведено доцільність їх впровадження у виробництво.

Ключові слова: мікрореактор, структурований реактор, мікроканал, кінетика, моделювання.

1. Вступ

Зрушення технічного прогресу в область мікротехнологій являється пріоритетним напрямком дослідження для багатьох галузей науки й виробництва (рис. 1) [1]. В наш час застосування мікроструктурних реакторів замість традиційних апаратів являється новим альтернативним підходом, який інтенсивно розвивається в багатьох наукових центрах США, Канади, Нідерландів,

Німеччини, Швеції [2]. Тут було проведено дослідження процесів і реакцій у мікрореакторах та створено довідники з детальним описом методик виконання експериментів. При цьому науковий та практичний інтерес полягає в можливості оптимальної організації різних процесів хімічної технології.

Незважаючи на мініатюрність мікрореакторів, їх об'єм залишається занадто великим для того, щоб речовини взаємодіяли між собою на молекулярному рівні.