

Фалецька Г. І.

## ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ ВИБОРУ ПАСАЖИРАМИ ШЛЯХУ ПЕРЕСУВАННЯ У МІСТАХ

На підставі статистичної обробки результатів анкетного опитування розроблено модель вибору пасажиром шляху пересування у маршрутній системі міського пасажирського транспорту. В якості факторів у моделі враховані: параметри транспортного обслуговування, рівень тарифів на послуги маршрутного пасажирського транспорту та показники, що характеризують соціально-економічні умови життя населення.

**Ключові слова:** шлях пересування, модель вибору, узагальнена вартість пересування, анкетне обстеження, розподіл кореспонденцій.

### 1. Вступ

Вихідними даними для вирішення практично всіх завдань з організації та планування перевезень на міському маршрутному пасажирському транспорті є відомості про пасажиропотоки. Цю інформацію можна отримати шляхом проведення натурних обстежень. В якості недоліку натурних методів слід зазначити, що вони дають змогу встановити існуючі характеристики пасажиропотоків (кореспонденцій). Для вирішення завдань прогнозування, тим більше довгострокового, використання натурних обстежень може бути недостатньо. Це пов'язано з тим, що зміна параметрів функціонування маршрутної системи призводить до перерозподілу кореспонденцій внаслідок чого параметри пасажиропотоків змінюються [1].

Альтернативним підходом до визначення пасажиропотоків, що дає змогу врахувати взаємозв'язок між параметрами функціонування маршрутної системи та величиною пасажиропотоків, є математичне моделювання. У завданні розрахунку потоків на мережі виділяють два основних етапи [2]. На першому — здійснюється прогнозування міжрайонних пасажирських кореспонденцій. На другому етапі на підставі встановлених раніше розмірів кореспонденцій проводиться прогнозування поточкорозподілу, що характеризує умови функціонування маршрутної системи. При цьому визначають можливі шляхи пересування та величину кореспонденції, що за ними реалізується. При моделюванні достатньо складно врахувати всю сукупність факторів, які впливають на формування пасажиропотоків. Унаслідок цього модельні значення пасажиропотоків не повною мірою відповідають фактичним. Використання недостатньо адекватних моделей формування пасажиропотоків призводить до необґрунтованих рішень з удосконалення перевізного процесу на міському пасажирському транспорті. Основна частка помилки при розрахунку пасажиропотоків обумовлена використанням недостатньо адекватних моделей вибору пасажиром шляху пересування [1]. Внаслідок цього, визначення параметрів моделі вибору пасажиром шляху, що дозволить підвищити адекватність моделювання пасажиропотоків, є актуальним завданням.

### 2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

При рішенні практичних завдань розподіл пасажиропотоків за ділянками маршрутної мережі нерідко здійснюється в найпростіший спосіб — за єдиним найкоротшим зв'язком між пунктами, що розглядаються [1, 3, 4].

Використання методу найкоротшого шляху дає змогу значно спростити вихідну інформацію й істотно скоротити витрати машинного часу [5]. Розгляд лише одного найкоротшого шляху пересування призводить до того, що розрахункова модель не зовсім точно відобразить реальний процес [1, 6]. При цьому не враховується його імовірнісний характер, можливість вибору пасажиром різних шляхів пересування, які можуть відрізнитись за характеристиками [1]. Це позначається на адекватності відображення процесу розподілу, що призводить до помилок у визначенні розрахункових пасажиропотоків на ділянках мережі [1].

Моделі, які передбачають розподіл кореспонденцій на декілька альтернативних варіантів шляху пересування відрізняються за врахованими критеріями, гіпотезами вибору, способом побудови та іншими ознаками.

Найпростішим способом є використання гіпотези, згідно з якою пасажиропотоки розподіляються між конкуруючими шляхами пересування зворотно пропорційно їхній довжині або витратам часу на пересування [1]. Така гіпотеза, однак, дає занижені результати нерівномірності розподілу пасажиропотоків по мережі у функції витрат транспортного часу [1]. Крім цього, не враховується багатфакторність процесу.

Більшою точністю відрізняються моделі розподілу пасажиропотоків за конкуруючими шляхами з використанням «методу опорів», згідно з яким імовірність вибору шляхів пересування визначається за аналогією до розподілу електричного струму в паралельних ланцюгах [1, 5]. Ці моделі відносять до групи традиційних аналогів закону Кірхгофа [5]. Важливе значення для одержання адекватних результатів розрахунку має встановлення коефіцієнтів моделі за результатами натурних спостережень. Такі моделі вимагають «калібрування» за матеріалами натурних обстежень пасажироперевезень [1].

Іншим прикладом використання методу аналогії для моделювання вибору пасажиром шляху пересування є гіпотеза про схожість цього процесу з основним психофізичним законом. Згідно з цим підходом у якості фізичних подразників розглядають фактори, що впливають на вибір шляху пересування. Аналогом реакції на подразник є частка кореспонденцій, що реалізується за певним шляхом [7]. Тобто такий підхід дає змогу врахувати значну кількість чинників, що впливають на вибір пасажиром шляху пересування. У той же час, як і в попередніх моделях, для отримання адекватних результатів розрахунку необхідне калібрування моделі.

У закордонній практиці для математичного опису поведінкових аспектів прийняття рішень користувачами транспортної системи (водіями й пасажиром) широко використовуються дискретні моделі вибору (discrete choice models) [8–11]. У якості критерію вибору використовується максимізація користності для користувача або мінімізація його витрат. Суть такого підходу полягає в тому, що при розгляді множини альтернативних шляхів кожному шляху відповідає певна величина, яка називається користністю (або узагальненою вартістю), що залежить від параметрів, які характеризують цей шлях [8].

Найчастіше функцію користності подають у вигляді лінійної залежності, що містить такі характеристики альтернатив, як час піших підходів, час очікування, час і вартість поїздки тощо [12]. Крім цього, до функції користності включають випадковий фактор, який наводять у термінах імовірного розподілу, при чому його математичне очікування приймають за нуль. Ця змінна відбиває неправильні уявлення пасажирів про параметри пересування, а також вплив факторів, що не піддаються безпосередньому вимірюванню, однак ураховуються пасажиром у процесі ухвалення рішення. Якщо випадковий компонент підлягає нормальному закону розподілу, то для опису вибору використовують пробіт-модель. У випадку розподілу випадкової величини за законом Вейбула використовують логіт-моделі [8–10].

Зазначені моделі вибору пасажиром шляху пересування недостатньо враховують поведінкові аспекти вибору пасажиром шляху пересування та сукупність факторів, які на них впливають, а саме: можливість здійснення пасажиром різних варіантів здійснення пішохідного складника транспортного пересування (вибір зупинного пункту); погіршення характеристик шляху пересування для пасажирів при зростанні величини пасажиропотоку на його складниках; взаємозв'язок між попитом на використання шляху пересування та характеристиками комфортності пересування.

Враховання зазначених особливостей можливе шляхом проведення інтегральної оцінки характеристик шляхів пересування з використанням показника узагальненої вартості (узагальнених витрат) пересування, що визначається за формулою [13]:

$$C_{періj}^k = \left[ \sum_{i,j} \frac{I_{пінш}^k(i,j)}{V_{пінш}} + \sum_{z=1}^n \left( \frac{I_{мп}^z}{V_c^z} + \left( \frac{z}{2} + \frac{\sigma_z^2}{2} + \frac{P_{від}^z}{1 - P_{від}^z} \cdot \frac{z}{пл} \right) \frac{1}{60} \right) + \sum_{z=1}^{n-1} t_{ч}^z \right] C_{год} + \frac{D_m(-0,0709 + 0,545(\Pi^k - 3)^2)}{D_{рм}100} + \sum_{z=1}^n T^z, \quad (1)$$

де  $V_{пінш}$  — середня швидкість пішохода, км/год;  $I_{пінш}^k(i,j)$  — відстань пішого руху відповідно у транспортному районі

відправлення  $i$  та прибуття  $j$  при здійсненні пересування по шляху  $k$ , км;  $I_{мп}^z$  — відстань маршрутної поїздки на  $z$ -му маршруті, км;  $V_c^z$  — швидкість сполучення на  $z$ -му маршруті, км/год;  $I_{пл}^z$  — плановий інтервал руху на маршруті  $z$ , хв.;  $\sigma_z$  — середнє квадратичне відхилення від планового інтервалу руху, хв.;  $P_{від}^z$  — імовірність відмови пасажиром в посадці на зупинному пункті маршруту  $z$ ;  $D_m$  — дохід середньостатистичного пасажиром за місяць, грн.;  $T^z$  — величина тарифу на маршруті  $z$ , грн.;  $D_{рм}$  — середня кількість робочих днів у місяці, дн.;  $\Pi^k$  — показник, що характеризує функціональний стан організму пасажиром наприкінці здійснення пересування по шляху  $k$ , бали;  $n$  — кількість маршрутних поїздок у мережній, од.;  $t_{ч}^z$  — час на пішохідний рух між зупинними пунктами при здійсненні пересадки, год.

За величиною узагальненої вартості пересування можна проводити порівняльну оцінку альтернативних шляхів пересування, здійснювати їх ранжування за мірою привабливості для пасажирів. Разом з цим частка кореспонденції реалізована за альтернативними шляхами при зміні факторів, що визначають узагальнену вартість пересування (1) змінюється за певною функцією. Подальшим завданням є вибір виду функції, що найбільш адекватно описує зміну частки кореспонденції залежно від узагальненої вартості пересування та встановлення її параметрів.

### 3. Об'єкт, мета і завдання дослідження

Об'єктом дослідження є процес вибору пасажиром шляху пересування у містах.

Мета дослідження — визначення параметрів моделі вибору пасажиром шляху пересування у містах.

Для досягнення поставленої мети вирішувалися наступні задачі:

- проведення анкетного обстеження вибору пасажиром шляху пересування;
- статистична обробка матеріалів анкетного обстеження з метою визначення параметрів моделі вибору пасажиром шляху пересування;
- оцінка адекватності моделі.

### 4. Матеріали та методи визначення параметрів моделі вибору пасажиром шляху пересування у містах

**4.1. Досліджувані параметри та обладнання, що використовувалось в експерименті.** При проведенні опитування пасажирів щодо вибору шляху пересування до анкети заносили індивідуальні дані пасажиром (вік, професію, середньомісячний дохід, адресу місця мешкання та пункт призначення пересування), встановлювали час початку пересування та шляхи, які пасажир використовує при його здійсненні; зупинний пункт початку та закінчення пересування; номери маршрутів, що використовуються, та величину тарифу; пункти пересадок (у разі здійснення мережної поїздки); витрати часу на здійснення складників пересування (пішохідний рух, очікування, поїздки у транспортному засобі, пересадки); ступінь заповнення транспортного засобу; наявність відмов пасажиром в посадці.

При визначенні ступеня заповнення транспортного засобу використовували методику оковимірювального обстеження пасажиропотоків. У подальшому матеріали анкетного обстеження доповнювали даними натурних спостережень.

**4.2. Методика визначення параметрів моделі вибору пасажирами шляху пересування у містах.** Параметри моделі вибору пасажирами шляху пересування визначали шляхом обробки результатів анкетного опитування з використанням методів регресійного і кореляційного аналізу. Оцінку адекватності моделі проводили за величиною середньозваженої помилки апроксимації.

## 5. Результати досліджень закономірностей впливу параметрів очікування приміських автобусів на значення показника активності регуляторних систем пасажирів

Величина узагальнених витрат на пересування (1) може набувати широкого діапазону значень. Унаслідок цього при зіставленні різних варіантів шляху пересування постає необхідність у використанні відносного показника, у якості якого прийнято відхилення величини узагальнених витрат на пересування для  $k$ -го шляху від мінімального (критичного):

$$\Delta C_{перij}^k = \frac{C_{перij}^k - C_{перij}^{\min}}{C_{перij}^{\min}} 100\%, \quad (2)$$

де  $C_{перij}^{\min}$  — мінімальне значення узагальнених витрат на пересування між транспортними районами  $i$  та  $j$ , грн.

Із метою обмеження кількості варіантів шляху пересування, зважаючи на умови доцільності їхнього використання пасажирами, розглядаються мають лише ті, що входять до області згладжування. Виходячи з цього, розглядаються всі варіанти шляху пересування, відхилення яких від критичного не перевищує заданої константи ( $\Delta$ ):

$$\Delta C_{перij}^k \leq \Delta. \quad (3)$$

Шляхи пересування, для яких виконується умова (3) утворюють множину альтернативних, за якими розподіляються кореспонденції між кожною парою транспортних районів  $i$  та  $j$ .

Зміна показника  $\Delta C_{перij}^k$  викликає певні зміни частки кореспонденції, що буде реалізована за цим шляхом  $P_{ij}^k$ . При цьому виходимо з припущення, що частка кореспонденції визначається певною функцією від  $\Delta C_{перij}^k$  і залежить від характеристик інших альтернативних шляхів пересування. У загальному вигляді цю залежність можна подати таким чином:

$$P_{ij}^k = \frac{f(\Delta C_{перij}^k)}{\sum_{k=1}^m f(\Delta C_{перij}^k)}. \quad (4)$$

Установлення безпосереднього вигляду функції  $f(\Delta C_{перij}^k)$  вимагає проведення експериментальних до-

сліджень. Для цього було застосовано анкетний метод обстеження пересувань пасажирів.

Унаслідок проведення анкетування було заповнено 7587 анкет, із яких придатними для подальшого використання виявилися 7422. Наступним етапом стало формування вибірки із отриманих матеріалів за ознакою відповідності місць відправлення та призначення кореспонденції. Обсяг вибірки приймали не менше ніж 20 анкет. Це дало змогу одержати помилку оцінки розподілу пасажирів за шляхами пересування не більше 5 % [14].

Згрупувавши таким чином анкетні дані, було визначено місця відправлення та призначення кореспонденцій, шляхи пересування та частку кореспонденції, що реалізується за кожним шляхом. У наслідок цього було отримано 36 пар пунктів відправлення та призначення кореспонденцій і 135 альтернативних шляхів пересування.

Статистичну обробку дослідних даних використовували із застосуванням методу регресійного аналізу. У якості функцій, що мали розглядатися, використано експоненційну залежність:

$$f(\Delta C_{перij}^k) = \exp(\beta \Delta C_{перij}^k), \quad (5)$$

й оцінку функцію, запропоновану Д. Лозе [15]:

$$f(\Delta C_{перij}^k) = \left[ 1 + \left( \frac{\Delta C_{перij}^k}{F} \right)^G \right]^{\frac{E}{G}}, \quad (6)$$

де  $\beta$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $E$  — параметри функцій, що визначаються за статистичними даними.

Як наслідок було визначено такі параметри експоненційної функції ( $\beta = 0,0683$ ) і функції (4.5):  $F = 33,956$ ;  $G = 1,599$ ;  $E = 6,320$ .

Результати статистичної оцінки моделей засвідчили, що для обох функцій спостерігається висока тіснота зв'язку (табл. 1).

Таблиця 1

Статистична характеристика моделей

Вигляд моделі	Значення коефіцієнтів		Коефіцієнт детермінації	Коефіцієнт кореляції	Середньозважена похибка, %
$f(\Delta C_{перij}^k) = \exp(\beta \Delta C_{перij}^k)$	$\beta$	-0,0683	0,948	0,974	15,707
$f(\Delta C_{перij}^k) = \left[ 1 + \left( \frac{\Delta C_{перij}^k}{F} \right)^G \right]^{\frac{E}{G}}$	$F$	33,956	0,955	0,977	13,829
	$G$	1,599			
	$E$	6,320			

Оцінку адекватності моделей проводили за середньозваженою похибкою. Для цього було визначено абсолютну похибку моделі за формулою:

$$\delta_{абс}^k = P_{ijф}^k - P_{ijр}^k, \quad (7)$$

де  $P_{ij\phi}^k$ ,  $P_{ijp}^k$  — відповідно фактичне та розрахункове значення частки кореспонденцій, що реалізуються за шляхом пересування  $k$  між районами  $i$  та  $j$ .

Відносну похибку моделі визначено таким чином:

$$\delta_{\text{відн}}^k = \frac{|P_{ij\phi}^k - P_{ijp}^k|}{P_{ij\phi}^k} 100 \% \quad (8)$$

Величину середньозваженої помилки, розраховували за формулою:

$$\delta_{\text{сер зв}} = \frac{\sum_{i,j} \sum_{k=1}^m \delta_{\text{відн}}^k P_{ij\phi}^k}{\sum_{i,j} \sum_{k=1}^m P_{ij\phi}^k} \quad (9)$$

Таким чином, за результатами статистичної оцінки моделей можемо дійти висновку, що функція вигляду:

$$f(\Delta C_{\text{пер}ij}^k) = \left[ 1 + \left( \Delta C_{\text{пер}ij}^k / F \right)^G \right]^{-E}$$

описує процес розподілу кореспонденцій між альтернативними шляхами пересування з більшим ступенем адекватності, ніж експоненційна.

Із урахуванням формул (4) та (6) частку кореспонденцій, що реалізується за шляхом пересування, визначаємо за такою залежністю:

$$P_{ij}^k = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\Delta C_{\text{пер}ij}^k}{33,9559} \right)^{1,5988} \right]^{-\frac{6,31984}{1,5988}}}{\sum_{k=1}^m \left[ 1 + \left( \frac{\Delta C_{\text{пер}ij}^k}{33,9559} \right)^{1,5988} \right]^{-\frac{6,31984}{1,5988}}} \quad (10)$$

де  $m$  — кількість шляхів пересування, що використовують пасажир при здійсненні пересування між районами  $i$  та  $j$ .

Еластичність функцій визначаємо за залежністю [15]:

$$\epsilon(f(\Delta C_{\text{пер}ij}^k)) = -\beta \Delta C_{\text{пер}ij}^k \quad (11)$$

$$\epsilon(f(\Delta C_{\text{пер}ij}^k)) = -E \frac{\Delta C_{\text{пер}ij}^k \cdot G}{F^G + \Delta C_{\text{пер}ij}^k \cdot G} \quad (12)$$

Графік функцій і зміну їхньої еластичності, з урахуванням встановлених значень коефіцієнтів, наведено на рис. 1.

Як бачимо з графіка на відміну від експоненційної залежності функція (6) має нелінійну еластичність. Тобто зміна величини узагальної вартості пересування нелінійно позначається на зміні оцінної характеристики шляху пересування. Особливо це помітно при значному відхиленні узагальної вартості пересування від мінімальної.

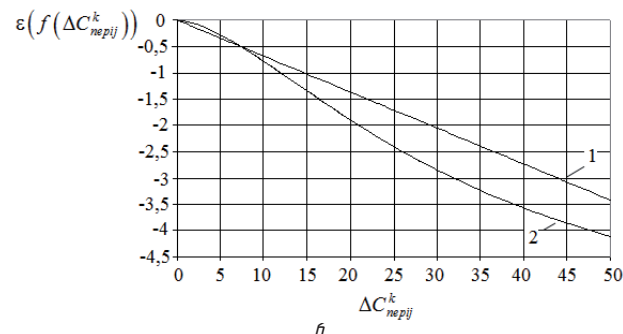
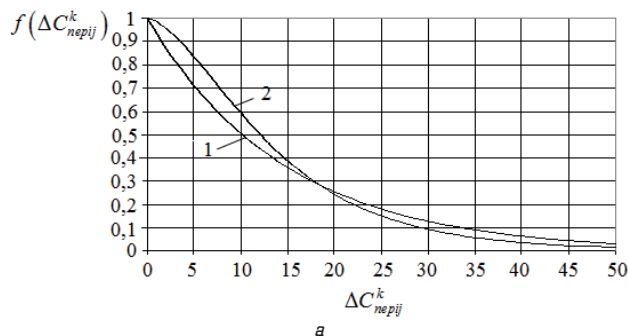


Рис. 1. Графіки функцій: а — вибору пасажирями шляху пересування; б — еластичність; 1 — функція (5); 2 — функція (6)

## 6. Обговорення результатів визначення параметрів моделі вибору пасажирями шляху пересування у містах

Оцінка адекватності моделі розподілу кореспонденцій за середньозваженою похибкою апроксимації, значення якої склало 13,829 %, указує на те, що модель з достатнім ступенем повноти описує процес розподілу кореспонденцій між альтернативними варіантами шляху пересування. Таким чином, обробка результатів анкетного обстеження дає змогу стверджувати, що розподіл кореспонденцій за альтернативними шляхами пересування найбільш адекватно описується оцінною функцією з нелінійною еластичністю.

## 7. Висновки

Обробка результатів анкетного опитування дала змогу встановити параметри моделі вибору пасажирями шляху пересування. В основу моделі покладено показник узагальної вартості пересування за альтернативними шляхами пересування. Встановлено, що зміна частки кореспонденції реалізованої за альтернативними шляхами пересування з достатнім рівнем адекватності (середньозважена помилка апроксимації складає 13,829 %, а коефіцієнт кореляції — 0,977) описується оцінною функцією з нелінійною еластичністю.

Напрямок подальших досліджень є використання розробленої моделі вибору пасажирями шляху пересування для вирішення завдань прогнозування пасажиропотоків у маршрутній системі міського пасажирського транспорту.

## Література

- Ефремов, И. С. Теория городских пассажирских перевозок [Текст]: учеб. пособие для вузов / И. С. Ефремов, В. М. Кобозев, В. А. Юдин. — М.: Высш. школа, 1980. — 535 с.

2. Мягков, В. Н. Математическое обеспечение градостроительного проектирования [Текст] / В. Н. Мягков, Н. С. Пальчиков, В. П. Федоров. — Л.: Наука, 1989. — 144 с.
3. Антошвили, М. Е. Организация городских автобусных перевозок с применением математических методов и ЭВМ [Текст] / М. Е. Антошвили, Г. А. Варелопуло, М. В. Хрушев. — М.: Транспорт, 1974. — 104 с.
4. Варелопуло, Г. А. Организация движения и перевозок на городском пассажирском транспорте [Текст] / Г. А. Варелопуло. — М.: Транспорт, 1990. — 208 с.
5. Кривошеев, Д. П. Методы распределения пассажиропотоков в транспортных расчетах (обзор) [Текст] / Д. П. Кривошеев. — М.: ЦНИИП градостроительства, 1974. — 40 с.
6. Федоров, В. П. Транспортная система центра крупного города [Текст] / В. П. Федоров, Н. В. Булычева, Л. А. Лосин, О. М. Пахомова // Управление развитием территории. — 2009. — № 4. — С. 18–25.
7. Гульчак, О. Д. Підвищення ефективності міських пасажирських перевезень на основі удосконалення організації руху автобусів [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.01 / Оксана Дмитрівна Гульчак. — К., 2005. — 137 с.
8. Грановский, Б. И. Моделирование пассажирских потоков в транспортных системах [Текст] / Б. И. Грановский // Итоги науки и техники. Серия «Автомобильный и городской транспорт». — М., 1986. — Т. 11. — С. 67–107.
9. Sheffi, Y. Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods [Text] / Y. Sheffi. — Prentice Hall, 1985. — 416 p.
10. Cascetta, E. Transportation Systems Analysis [Text] / E. Cascetta // Springer Optimization and Its Applications. — Springer US, 2009. — 742 p. doi:10.1007/978-0-387-75857-2
11. Hickman, M. D. Transit Service and Path Choice Models in Stochastic and Time-Dependent Networks [Text] / M. D. Hickman, D. H. Bernstein // Transportation Science. — 1997. — Vol. 31, № 2. — P. 129–146. doi:10.1287/trsc.31.2.129
12. Горбачов, П. Ф. Концепція формування систем маршрутного пасажирського транспорту в містах [Текст]: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.22.01 / П. Ф. Горбачов. — Х., 2009. — 39 с.
13. Фалецкая, Г. И. Вероятность выбора пассажирами пути следования при городских пассажирских перевозках [Текст] / Г. И. Фалецкая // Коммунальное хозяйство городов. — 2008. — Вып. 81. — С. 316–321.
14. Садыхова, О. С. Выбор пассажиром пути следования [Текст]: сб. науч. трудов ЛИСИ / О. С. Садыхова // Городской транспорт и инженерная подготовка городской территории. — Л., 1974. — № 91. — С. 33–41.
15. Lohse, D. Grundlagen der Straßenverkehrstechnik und der Verkehrsplanung: Band 2 — Verkehrsplanung [Text] / Dieter Lohse, Werner Schnabel. — Beuth Verlag, 2011. — 648 p.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ВЫБОРА Пассажирами ПУТИ ПЕРЕДВИЖЕНИЯ В ГОРОДАХ

На основе статистической обработки результатов анкетного опроса разработана модель выбора пассажирами пути следования в маршрутной системе городского пассажирского транспорта. В качестве факторов в модели учтены: параметры транспортного обслуживания, уровень тарифов на услуги маршрутного пассажирского транспорта и показатели, которые характеризуют социально-экономические условия жизни населения.

**Ключевые слова:** путь передвижения, модель выбора, обобщенная стоимость передвижения, анкетное обследование, распределение корреспонденций.

*Фалецька Галина Іванівна, кандидат технічних наук, кафедра транспортних систем і логістики, Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова, Україна, e-mail: gala77712@rambler.ru.*

*Фалецкая Галина Ивановна, кандидат технических наук, кафедра транспортных систем и логистики, Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А. Н. Бекетова, Украина.*

*Faletska Galina, O. M. Beketov National University of Urban Economy, Kharkiv, Ukraine, e-mail: gala77712@rambler.ru*

УДК 519.866+519.711.2

DOI: 10.15587/2312-8372.2015.41156

Альрефаи Валид  
Ахмед

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНКУРЕНТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*Исследованы эффекты фазового пространства системы дифференциальных уравнений типа Вольтерра, которые описывают взаимодействие (кооперацию, конкуренцию и др.) для двух и большего числа объектов, которые принято называть «видами». Рассмотрены дополнительные особенности фазовых портретов при слабых синусоидальных внешних воздействиях на скорость «размножения». Исследована устойчивость неавтономной системы. Найдены численные решения при дестабилизации модели на частотах воздействия, близких к частоте цикла невозмущенной системы.*

**Ключевые слова:** взаимодействие видов, модель Вольтерра, проблемы устойчивости, аттрактор, тор, возмущения, хаос.

### 1. Введение

Известно, что впервые с необходимостью исследования динамики систем с помощью нелинейных моделей прикладная наука столкнулась в первой половине

XX века. К тому времени для этого уже существовали развитые, в частности Пуанкаре, Понтрягиным, Петровским и Хопфом, математические методы.

Параллельно этому появились первые, достаточно адекватные, линейные, а потом и нелинейные матема-