 ISSN 2226-3780

УДК 681.3.057 : 518.12
DOI: 10.15587/2312-8372.2015.41114

Костьян Н. Л.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

*Исследована задача компьютерной идентификации передаточной функции по переходной характеристике, полученной экспериментальным путем. Определены преимущества и недостатки рассмотренных интерполяционных алгоритмов представления оригиналов динамического объекта. Разработан программный комплекс идентификации передаточных функций с возможностью итерационного уточнения по коэффициенту затухания.*

**Ключевые слова:** *интерполяция, передаточная функция, переходной процесс, устойчивая динамическая система.*

## 1. Введение

Потребность в построении математических моделей функционирования естественных и искусственных объектов и процессов возникает в различных областях науки, техники, производства. При этом часто необходимо решать, как задачу построения динамической модели изучаемого объекта или процесса, так и проблему выбора адекватной модели из числа существующих.

Современный этап развития математического моделирования характеризуется как углублением работ по построению моделей, так и охватом все более широкого круга явлений и процессов. Потребности практики определяют развитие методов построения моделей двух основных типов: гносеологических и информационных. Модели первого типа предназначены для описания физической сущности моделируемых явлений, процессов или объектов, их построение тесно связано с той областью знаний, для которой они строятся. В отличие от гносеологических, информационные модели могут давать формальное описание, устанавливающее связь между входными и выходными переменными, непосредственно не связанную с физической природой объекта, что обуславливает их широкое использование при решении многих задач управления, прогнозирования, контроля, исследования динамических процессов в технике, биологии, медицине, экономике, экологии, сельском хозяйстве и т. п.

Использование методов компьютерной идентификации динамических моделей позволяет решить задачу оперативного получения адекватной информационной модели практически для любого класса объектов и систем, независимо от степени их сложности.

## 2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

При анализе и проведении исследований установившихся и переходных процессов используют следующие способы [1]:

— теоретические аналитические расчеты с использованием различных математических методов;
— теоретическое математическое и физическое моделирование по заданным параметрам моделируемого объекта. Для сопоставления с результатами аналитических методов требуется нахождение интерполирующего аналитического представления в виде расчетного выражения;
— практические эксперименты с помощью цифровых терминалов и цифровых регистраторов. Найденные по результатам экспериментов интерполирующие расчетные выражения по интервалам сопоставляются с аналитическими формулами.

На сегодняшний день существует множество алгоритмов идентификации, обеспечивающих получение динамических моделей переходных процессов в форме разнообразных математических зависимостей. Так в работе [1] авторами получен и реализован алгоритм нахождения значений параметров интерполирующего выражения для представления переходных электрических величин в сегменте электроэнергетической системы, который основан на предварительном Фурье анализе и аппроксимации синусоидой. Алгоритм имеет ограничения и применим для сегментов, которые можно представить только в виде суммы синусоидальных гармоник и экспоненты, то есть, в состав электрических величин не должны входить другие слагающие. В [2] выполнен сравнительный анализ использования алгебраических и гиперболических полиномов в аппроксимирующих зависимостях при расчете переходных процессов в выходных цепях разрядно-импульсных систем. Для моделирования переходных процессов электромагнитных механизмов постоянного тока в статике на каждом шаге интегрирования мгновенные значения электромагнитных сил целесообразно определять из интерполированных характеристик. Авторами [3] приведены рекомендации к представлению характеристик электромагнитных сил с применением кусочно-полиномиальной интерполяции (сплайн-интерполяции) и дифференцирования на ее основе.

Интерес представляют собой методы идентификации передаточных функций динамических систем. Так в [4–6] используются методы моментов и многократного интегрирования для частных случаев построения передаточных функций определенных видов.

Рассмотрим задачу компьютерной идентификации передаточной функции по переходной характеристике, полученной экспериментальным путем. Очевидно, что наиболее подходящими в смысле простоты компьютерной реализации являются алгоритмы идентификации, построенные на базе алгоритмов аппроксимации оригиналов в удобном для последующего получения изображения виде [7–9]. Так, для аппроксимации апериодических переходных процессов достаточно эффективными оказываются интерполяционные алгоритмы аппроксимации оригиналов, приведенные в [7].

Одной из удобных форм представления некоторого переходного процесса объекта с самовыравниванием (устойчивой динамической системы) является аппроксимирующее выражение:

$$\varphi(x)=a_0+e^{-\lambda x}\sum_{i=1}^{n}a_i x^{i-1}, \tag{1}$$

где $\lambda$, $a_0$, $a_i$ — постоянные коэффициенты ($\lambda$ — коэффициент затухания) применение к которому преобразования Лапласа-Карсона позволяет получить передаточную функцию в виде:

$$W(p)=\sum_{i=0}^{n}h_i\frac{\lambda^i}{(p+\lambda)^i}, \tag{2}$$

где:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}h_i=a_0,\\&-\sum_{i=1}^{n}h_i=h_0-a_0=a_1,\\&-\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\sum_{j=i}^{n}h_j=a_i, i=2,3,\ldots,n.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Определение коэффициентов в выражении (1) можно выполнять различными методами [7], что приводит к различным алгоритмам идентификации. Особенности компьютерной реализации данных алгоритмов будут рассмотрены более подробно в последующих разделах.

## 3. Объект, цель и задачи исследования

*Объект исследования* — методы и средства компьютерного моделирования динамических систем.

*Целью данной работы* является исследование особенностей применения интерполяционных алгоритмов для решения задачи идентификации динамического объекта с самовыравниванием при рассмотрении переходных процессов.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

— Рассмотрение интерполяционного алгоритма аппроксимации оригинала исследуемого объекта.

— Исследование вариационного метода интерполяции с возможностью применения итерационного алгоритма.

## 4. Материалы и методы исследований идентификации передаточных функций по переходным процессам

**4.1. Алгоритм 1.** Метод интерполяции для определения коэффициентов в выражении (1) состоит в следующем [7]. Задается значение $\lambda>0$, что приводит к системе:

$$\varphi(x_j)=a_0+e^{-\lambda x_j}\sum_{i=1}^{n}a_i x_j^{i-1},\ j=1,2,\ldots,n, \tag{4}$$

решение которой дает искомые коэффициенты $a_i$. Здесь $x_j$ — дискретные точки задания переходного процесса, а $a_0$ определяется выражением:

$$a_0=\lim_{x\to\infty}\varphi(x). \tag{5}$$

Существенным недостатком данного метода является прямая зависимость размерности системы (4) от количества точек дискретизации переходного процесса. Это приводит к необходимости решения плохо обусловленной системы линейных уравнений большой размерности (что, в свою очередь, может привести к численной неустойчивости данного алгоритма интерполяции) и получению передаточной функции (2) в виде ряда с огромным количеством членов.

**4.2. Алгоритм 2.** Вариационный метод [7] определения $a_i$, позволяющий обеспечить определенную независимость количества членов в (1) от количества точек интерполяции $m=n$, состоит в следующем.

Вводится функция:

$$\varphi^*(x)=\frac{\varphi(x)-a_0}{e^{-\lambda x}}=\sum_{i=1}^{n}a_i x^{i-1}, \tag{6}$$

однозначно связанная с $\varphi(x)$. Задается значение $\lambda>0$; определяется $a_0$ из (5) и из условия наименьшего среднеквадратичного уклонения строится аппроксимирующий полином:

$$\varphi^*(x)=\frac{D_1}{D_2}, \tag{7}$$

который представляет собой отношение определителей:

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & x & \ldots & x^{n-1}\\ \gamma_0 & c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1}\\ \gamma_1 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \gamma_{n-1} & c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2(n-1)}\end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1}\\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2(n-1)}\end{vmatrix}, \tag{9}$$

 ISSN 2226-3780

где:

$$c_r = \sum_{j=1}^{m} x_j^r, \quad r = 0,1,2,\ldots,2(n-1), \tag{10}$$

$$\gamma_l = \sum_{j=1}^{m} x_j^l \varphi^*\left(x_j\right), \quad l = 0,1,2,\ldots,n-1, \tag{11}$$

$j = 1,2,\ldots,m$ — номера точек интерполяции.

После раскрытия определителей $D_1$, $D_2$ и построения полинома (7) каждое значение $a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ получается как коэффициент при $x^{i-1}$, т. е. таким образом получается функция $\varphi^*(x)$.

Построив функцию $\varphi(x)$, оценивают погрешность приближения и при необходимости уменьшают ее путем нового расчета с увеличением порядка полинома (1). Эффективным способом улучшения полученного приближения является уточнение коэффициента затухания, выбранного ранее произвольно. Для этого обычно достаточно решить систему, составленную из m независимых уравнений:

$$\varphi(x_j) - e^{-\lambda_j x_j} \sum_{i=1}^{n} a_i x_j^{i-1} - a_0 = 0, \tag{12}$$

относительно $\lambda_j$, $j = \overline{1,\ m}$, и в качестве расчетного принять среднее значение:

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j. \tag{13}$$

Использование этого значения в сочетании с ранее определенными $a_i$ позволяет, как правило, резко уменьшить погрешность аппроксимации. Такой процесс уточнения может быть продолжен, если для уточнения $\lambda$ заново вычислить коэффициенты $a_i$ по формулам (6)–(11) или даже повторить цикл вычисления $a_i$, $\lambda$ по формулам (6)–(13) несколько раз.

Недостатком данного метода идентификации является наличие погрешности аппроксимации переходного процесса в нулевой точке, что связано с использованием условия минимизации среднеквадратичного уклонения для построения аппроксимирующего полинома. При большом количестве точек дискретизации переходного процесса, а также при достаточно большом $a_0$ это может привести к неустойчивой работе данного алгоритма идентификации на начальном участке экспериментальных характеристик. Вероятным решением данной проблемы может служить предварительное приведение масштаба переходного процесса к единице относительно установившегося значения с последующим обратным пропорциональным преобразованием координат.

## 5. Результаты исследований идентификации передаточной функции по переходному процессу

Более перспективным для рассматриваемой области применения является алгоритм 2, который в отличие от алгоритма 1 позволяет также осуществлять итерационное уточнение модели. Однако достаточно серьезной проблемой при компьютерной реализации этого алгоритма является комбинация методов символьной математики с вычислениями (формулы (7)–(11)), что создает определенные трудности в использовании для его реализации современных моделирующих сред, а также пакетов символьных вычислений. Для решения данной проблемы эффективной оказалась реализация алгоритма 2 в современной моделирующей системе MATLAB благодаря использованию возможностей, входящих в ее состав пакетов символьных вычислений Symbolic Math и Extended Symbolic Math Toolboxes [10], которые позволяют пользователю легко комбинировать численные и символьные вычисления воедино без потери скорости и точности вычислений.

Следует отметить, что система MATLAB и до введения пакетов символьных вычислений считалась наиболее мощной системой при решении математических задач и математического моделирования в численном виде. Добавление в нее возможностей выполнения символьных вычислений и преобразований, которые ранее были доступны только в системах принципиально иного класса, относящихся к компьютерной алгебре, сделало систему MATLAB в полной мере универсальной системой.

С учетом итеративности построения динамической модели при помощи алгоритма 2 и необходимости использования субъективной оценки адекватности полученной модели пользователем, реализованный в моделирующей среде MATLAB программный комплекс идентификации передаточных функций имеет структуру, изображенную на рис. 1.

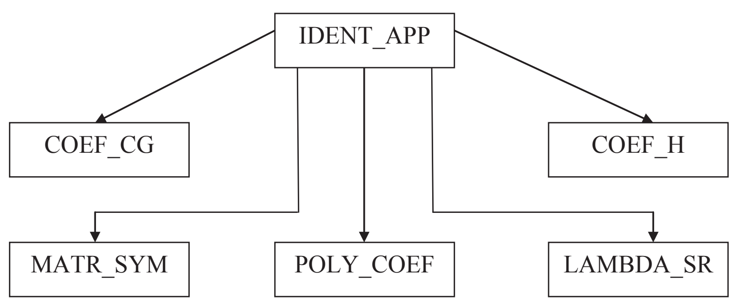


**Рис. 1.** Структура программного комплекса идентификации передаточных функций по переходным процессам, построенного на базе интерполяционного алгоритма 2

Программа IDENT_APP является ядром комплекса и обеспечивает диалоговый итерационный процесс идентификации передаточной функции исследуемого объекта или системы. Программа IDENT_APP использует подпрограммы COEF_CG для вычисления коэффициентов $c_r$, $\gamma_l$ по формулам (10), (11); MATR_SYM для формирования матриц $D_1$ и $D_2$ в символьном виде по формулам (8), (9); POLY_COEF для формирования полинома $\varphi^*(x)$ в символьном виде с последующим выделением коэффициентов $a_i$ в численном виде; LAMBDA_SR для уточнения коэффициента $\lambda$ по формулам (12), (13); COEF_H для вычисления коэффициентов $h_i$, по формулам (3). Передаточная функция (2), а также соответствующий ей переходной процесс вычисляются с использованием средств пакета для анализа и синтеза линейных стационарных систем Control System Toolbox, входящего в среду MATLAB.

Процесс идентификации построен в диалоговом режиме. Пользователю предлагается задать порядок $n$ аппроксимирующего полинома и (по желанию) начальное приближение коэффициента затухания $\lambda$ (по умолчанию $\lambda = 1$). Далее вычисляются коэффициенты $a_i$ аппроксимирующего полинома (1) и строится передаточная функция (2). На экран выводятся графики идентифицируемого (обозначен сплошной линией) и смоделированного (обозначен пунктирной линией) переходных процессов, а также абсолютная ошибка идентификации. Пользователю предлагается уточнить коэффициент затухания $\lambda$; при согласии пользователя уточняется коэффициент $\lambda$ и строится новая передаточная функция (2) с выведением соответствующих графиков на экран. Затем пользователю в итерационном режиме предлагается уточнить параметры модели $a_i$, $\lambda$ с построением (в случае согласия пользователя) уточненных моделей и выведением соответствующих графиков идентифицируемого и моделированного переходных процессов, а также ошибки идентификации на экран. Пользователь может вернуться на шаг назад к предыдущей модели, если вновь уточненные параметры его по какой-либо причине не устраивают.

Передаточная функция, а также все остальные параметры модели доступны пользователю в операционной среде MATLAB, что позволяет получать эквивалентные математические модели в виде дифференциальных и интегральных уравнений по имеющейся модели в виде передаточной функции [7, 11].

В табл. 1 и на рис. 2 приведены результаты идентификации некоторого переходного процесса, полученного экспериментальным путем.

**Таблица 1**

Результаты идентификации

| $x$ | $\varphi(x)$ | $\varphi(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | –2 | 0 |
| 2 | 29,86146 | 29,86146 |
| 4 | 45,52982 | 45,52982 |
| 6 | 49,16269 | 49,16269 |
| 8 | 49,85575 | 49,85575 |
| 10 | 49,97636 | 49,97636 |
| 12 | 49,99625 | 49,99625 |
| 14 | 49,99942 | 49,99942 |

Смоделированная модель имеет следующие параметры: $n = 2$; $a_0 = 50$; $a_1 = 52$; $a_2 = 49$; $\lambda = 1{,}004$; $h_0 = -2$; $h_1 = 3{,}2$; $h_2 = 48{,}8$; $W(p) = -2 + \frac{3{,}2128}{p+1{,}004} + \frac{49{,}1912}{(p+1{,}004)^2}$.

Следует отметить, что приведенная модель для данного переходного процесса является оптимальной в смысле использования для ее получения рассмотренного алгоритма идентификации. Дальнейшее уточнение параметров $a_i$, $\lambda$, а также увеличение порядка $n$ аппроксимирующего полинома не дают существенного уменьшения ошибки идентификации и даже могут привести к ее увеличению.

## 6. Обсуждение результатов идентификации передаточной функции по переходному процессу

Рассмотренные интерполяционные алгоритмы компьютерной идентификации динамических моделей в виде передаточных функций по переходному процессу несмотря на достаточную эффективность применения обладают значительной численной неустойчивостью идентификации. Причем эта неустойчивость для алгоритма 1 обусловлена большой размерностью аппроксимирующего полинома (и, следовательно, необходимостью решать систему линейных алгебраических уравнений большой размерности, зачастую с плохо обусловленной матрицей), а в алгоритме 2 численная неустойчивость вызвана использованием приближения по методу наименьшего среднеквадратичного отклонения (что может давать весьма большую ошибку аппроксимации на начальном участке переходного процесса и, в итоге, может привести к несоответствию переходного процесса модели идентифицируемому переходному процессу). Еще одним достоинством алгоритма 1 при условии устойчивости вычислительного процесса является также обеспечение полного совпадения переходных процессов в нуле и достаточное совпадения идентифицируемого и смоделированного переходных процессов на начальном участке их динамического изменения. Поэтому представляется необходимым рассмотрение вопроса о построении интерполяционных алгоритмов компьютерной идентификации динамических моделей, сочетающих в себе достоинства двух рассмотренных алгоритмов и, в то же время, свободных от их недостатков. Нужно также рассмотреть вопрос о расширении класса идентифицируемых переходных процессов с включением в идентификацию переходных процессов колебательного характера.


**Рис. 2.** Графики идентифицируемого (обозначен сплошной линией) и смоделированного (обозначен пунктирной линией) переходных процессов

## 7. Выводы

Проведенные исследования идентификации передаточной функции по переходному процессу с использованием интерполяционных алгоритмов [7] позволили установить особенности их применения для динамических объектов с самовыравниванием.

Рассмотрен и реализован алгоритм итерационного уточнения коэффициента передаточной функции исследуемого объекта. Не смотря на сложность компьютерной реализации алгоритма 1 и существенную погрешность аппроксимации алгоритма 2 на начальном участке переходного процесса, существенным достоинством обеих алгоритмов является полное совпадение переходных процессов в области установившихся значений. Рекомендуется использование комбинированного итерационного алгоритма интерполяции при исследовании переходных процессов устойчивых динамических систем.

### Литература


1. Гэ Цюнь. Интерполяция установившихся и переходных электрических величин в ЭЭС [Текст] / Гэ Цюнь, Я. Л. Арцишевский // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. — Курск, 2008. — № 10. — С. 267–275.
2. Шидловская, Н. А. Сравнительный анализ использования алгебраических и гиперболических полиномов при исследовании переходных процессов в выходных цепях разрядноимпульсных систем [Текст] / Н. А. Шидловская, С. Н. Захарченко // Электротехника и Электромеханика. — Харьков: НТУ, 2012. — № 6. — С. 34–36.
3. Кондратьев, В. А. О представлении электромагнитных сил при структурном моделировании динамических свойств электромагнитных механизмов [Текст] / В. А. Кондратьев, Н. Г. Власова // Сборник научных трудов НГТУ. — Новосибирск: НГТУ, 2009. — № 4(58). — С 59–64.
4. Vrancic, D. Magnitude Optimum Techniques for PID Controllers [Text] / D. Vrancic; Ed. by R. C. Panda // Introduction to PID Controllers — Theory, Tuning and Application to Frontier Areas. — Rijeka: InTech, 2012. — P. 75–102. doi:10.5772/34404
5. Strejc, V. Auswertung der dynamischen Eigenschaften von Regelstrecken bei gemessenen Ein-und Ausgangssignalen allgemeiner [Text] / V. Strejc // Zeitschrift fur Messen, Steuern, Regeln. — Berlin, 1960. — Jg. 3, Nr. 1. — P. 7–10.
6. Костьян, Н. Л. Метод многократного интегрирования для исследования систем при произвольном воздействии [Текст]: зб. наук. пр. / Н. Л. Костьян // Вісник ЧДТУ. Серія технічні науки. — Черкаси: Черкаський державний технологічний університет, 2014. — № 3. — С. 32–38.
7. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы [Текст] / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К.: Наукова думка, 1986. — 543 с.
8. Гончаров, В. Л. Теория интерполирования и приближения функций [Текст] / В. Л. Гончаров. — М.: Гостехиздат, 1954. — 316 с.
9. Половко, А. М. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации [Текст]: монография / А. М. Половко, П. Н. Бутусов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 320 с.
10. Дьяконов, В. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник [Текст] / В. Дьяконов, В. Круглов. — СПб.: Питер, 2001. — 480 с.
11. Верлань, А. Ф. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов [Текст] / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусатаров, А. А. Игнатченко, Н. А. Максимович. — К.: Наукова думка, 1993. — 208 с.


### ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ КОМП'ЮТЕРНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ


Досліджено задачу комп'ютерної ідентифікації передавальної функції по перехідній характеристиці, отриманої експериментальним шляхом. Визначено переваги та недоліки розглянутих інтерполяційних алгоритмів подання оригіналів динамічного об'єкта. Розроблено програмний комплекс ідентифікації передавальних функцій з можливістю ітераційного уточнення за коефіцієнтом загасання.

**Ключові слова:** інтерполяція, передавальна функція, перехідний процес, стійка динамічна система.



***Костьян Наталья Леонидовна,*** *старший преподаватель, кафедра информационно-компьютерных технологий и фундаментальных дисциплин, Киевский национальный университет технологий и дизайна, Украина,* ***e-mail: k_n_l@mail.ru****.*

***Костьян Наталія Леонідівна,*** *старший викладач, кафедра інформаційно-комп'ютерних технологій та фундаментальних дисциплін, Київський національний університет технологій та дизайну, Україна.*

***Kostian Nataliia,*** *Kyiv National University of Technologies and Design, Ukraine,* ***e-mail: k_n_l@mail.ru***



УДК 539.3:534.222
DOI: 10.15587/2312-8372.2015.41151



**Бомба А. Я., Турбал Ю. В., Турбал М. Ю., Радовенюк О. В.**


# МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СЕЙСМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ СОЛІТОННОГО ПІДХОДУ


*В роботі розглянуто математичну модель сейсмічного процесу, що ґрунтується на врахуванні впливу відокремлених хвиль солітонного типу на виникнення окремих сейсмічних поштовхів. Запропонована методика уточнення ймовірності поштовху з врахуванням солітонної компоненти. Розроблено інформаційну систему, яка дозволяє аналізувати солітонну складову сейсмічних процесів та будувати прогнозні траєкторії окремих відокремлених хвиль.*

**Ключові слова:** *солітон, відокремлена хвиля, землетрус, динамічна система.*


## 1. Вступ

Відокремлені хвилі, які здатні зберігати свою форму та характеристики при поширенні на значні відстані, останнім часом є об'єктом вивчення у багатьох галузях теоретичних та прикладних наукових досліджень. Особливо цікавими є властивості солітонів — відокремлених хвиль, які мають властивості частинок. Актуальність дослідження локалізованих хвиль пов'язана з можливістю їх генерації з довільного збурення, поширюватись