2. Мягков, В. Н. Математическое обеспечение градостроительного проектирования [Текст] / В. Н. Мягков, Н. С. Пальчиков, В. П. Федоров. — Л.: Наука, 1989. — 144 с.
3. Антошвили, М. Е. Организация городских автобусных перевозок с применением математических методов и ЭВМ [Текст] / М. Е. Антошвили, Г. А. Варелопуло, М. В. Хрущев. — М.: Транспорт, 1974. — 104 с.
4. Варелопуло, Г. А. Организация движения и перевозок на городском пассажирском транспорте [Текст] / Г. А. Варелопуло. — М.: Транспорт, 1990. — 208 с.
5. Кривошеев, Д. П. Методы распределения пассажиропотоков в транспортных расчетах (обзор) [Текст] / Д. П. Кривошеев. — М.: ЦНИИП градостроительства, 1974. — 40 с.
6. Федоров, В. П. Транспортная система центра крупного города [Текст] / В. П. Федоров, Н. В. Булычева, Л. А. Лосин, О. М. Пахомова // Управление развитием территории. — 2009. — № 4. — С. 18–25.
7. Гульчак, О. Д. Підвищення ефективності міських пасажирських перевезень на основі удосконалення організації руху автобусів [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.01 / Оксана Дмитрівна Гульчак. — К., 2005. — 137 с.
8. Грановский, Б. И. Моделирование пассажирских потоков в транспортных системах [Текст] / Б. И. Грановский // Итоги науки и техники. Серия «Автомобильный и городской транспорт». — М., 1986. — Т. 11. — С. 67–107.
9. Sheffi, Y. Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods [Text] / Y. Sheffi. — Prentice Hall, 1985. — 416 p.
10. Cascetta, E. Transportation Systems Analysis [Text] / E. Cascetta // Springer Optimization and Its Applications. — Springer US, 2009. — 742 p. doi:10.1007/978-0-387-75857-2
11. Hickman, M. D. Transit Service and Path Choice Models in Stochastic and Time-Dependent Networks [Text] / M. D. Hickman, D. H. Bernstein // Transportation Science. — 1997. — Vol. 31, № 2. — P. 129–146. doi:10.1287/trsc.31.2.129
12. Горбачов, П. Ф. Концепція формування систем маршрутного пасажирського транспорту в містах [Текст]: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.22.01 / П. Ф. Горбачов. — Х., 2009. — 39 с.
13. Фалецкая, Г. И. Вероятность выбора пассажирами пути следования при городских пассажирских перевозках [Текст] / Г. И. Фалецкая // Коммунальное хозяйство городов. — 2008. — Вып. 81. — С. 316–321.
14. Садыхова, О. С. Выбор пассажиром пути следования [Текст]: сб. науч. трудов ЛИСИ / О. С. Садыхова // Городской транспорт и инженерная подготовка городской территории. — Л., 1974. — № 91. — С. 33–41.
15. Lohse, D. Grundlagen der Straßenverkehrstechnik und der Verkehrsplanung: Band 2 — Verkehrsplanung [Text] / Dieter Lohse, Werner Schnabel. — Beuth Verlag, 2011. — 648 p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ВЫБОРА ПАССАЖИРАМИ ПУТИ ПЕРЕДВИЖЕНИЯ В ГОРОДАХ

На основе статистической обработки результатов анкетного опроса разработана модель выбора пассажирами пути следования в маршрутной системе городского пассажирского транспорта. В качестве факторов в модели учтены: параметры транспортного обслуживания, уровень тарифов на услуги маршрутного пассажирского транспорта и показатели, которые характеризуют социально-экономические условия жизни населения.

Ключевые слова: путь передвижения, модель выбора, обобщенная стоимость передвижения, анкетное обследование, распределение корреспонденций.

Фалецька Галина Іванівна, *кандидат технічних наук, кафедра транспортних систем і логістики, Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова, Україна,* ***e-mail: gala77712@rambler.ru***.

Фалецкая Галина Ивановна, *кандидат технических наук, кафедра транспортных систем и логистики, Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А. Н. Бекетова, Украина.*

Faletska Galuna, *O. M. Beketov National University of Urban Economy, Kharkiv, Ukraine,* ***e-mail: gala77712@rambler.ru***

УДК 519.866+519.711.2
DOI: 10.15587/2312-8372.2015.41156

Альрефаи Валид Ахмед

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНКУРЕНТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Исследованы эффекты фазового пространства системы дифференциальных уравнений типа Вольтерра, которые описывают взаимодействие (кооперацию, конкуренцию и др.) для двух и большего числа объектов, которые принято называть «видами». Рассмотрены дополнительные особенности фазовых портретов при слабых синусоидальных внешних воздействиях на скорость «размножения». Исследована устойчивость неавтономной системы. Найдены численные решения при дестабилизации модели на частотах воздействия, близких к частоте цикла невозмущенной системы.

Ключевые слова: *взаимодействие видов, модель Вольтерра, проблемы устойчивости, аттрактор, тор, возмущения, хаос.*

1. Введение

Известно, что впервые с необходимостью исследования динамики систем с помощью нелинейных моделей прикладная наука столкнулась в первой половине XX века. К тому времени для этого уже существовали развитые, в частности Пуанкаре, Понтрягиным, Петровским и Хопфом, математические методы.

Параллельно этому появились первые, достаточно адекватные, линейные, а потом и нелинейные математические модели макро- и микроэкономики. Экономические системы всегда считались сложными, динамика рынка — хаотической, поэтому исследования в данной области проводились в большинстве случаев на основе усредненных статистических данных прошедших лет. Экономические прогнозы и расчет перспектив дальнейшего развития, в известной мере, были лишены научной основы и весомых оснований для рационального использования и претворения гипотез в жизнь. Математическое моделирование с использованием современных компьютерных технологий предоставляет возможность изучить характер той или иной экономической ситуации, перспективы, гипотезы, не затрачивая на эксперименты временные и материальные ресурсы. Таким образом, математические модели экономических процессов всегда актуальны, поскольку предоставляют возможность промоделировать за малое время то, что крайне сложно и долго испытывать в реальной жизни.

Общеизвестно, что важнейшим инструментом развития экономики является конкуренция. Также конкурентные (и кооперативные) процессы имеют место и в других областях, таких как биология, экология, психология, военное дело, логистика и большая часть проблем исследования операций и многокритериальной оптимизации процессов. Все эти области знаний и деятельности обслуживаются математическими моделями одного класса — уравнениями динамических систем. Базовыми в этом классе моделей являются логистические уравнения, а также их системы, которые впервые предложил и исследовал В. Вольтерра [1]. Он положил начало исследованию, так называемых, «мягких» моделей, варианты которых предлагаются в настоящей работе, где рассмотрены математические модели совместного сосуществования двух или нескольких «видов» (популяций, фирм, государств) как симметричного типа, так и типа «хищник — жертва», которая известна как модель Вольтерра-Лотки. Ее глубокие исследования и обобщения в XX веке заложили фундамент математической теории биологических сообществ или так называемой математической экологии [1].

В настоящей работе содержится описание основных механизмов перехода к неустойчивости и хаосу в модели сосуществования двух или большего числа достаточно многочисленных видов в замкнутом ареале, и алгоритмы их численного анализа, необходимые для решения задачи. Отметим, что во всех рассматриваемых моделях, независимо от предметной области и физического смысла, общими свойствами являются:

— связность (наличие попарных или более сложных взаимодействий популяций, которые могут иметь характер как положительных, так и отрицательных обратных связей);

— гладкость (следует из массовости популяции, и поэтому позволяет использовать для описания системы дифференциальных уравнений);

— замкнутость (одно из основных свойств системы, которое обычно обеспечивается путем создания подсистемы «окружающая среда»);

— нелинейность, определяющая сложную динамику даже для мало размерных систем (линеаризация — решение систем в вариациях — часто позволяет немного упростить ситуацию).

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Эффект хаотизации движений в детерминированных нелинейных системах, еще совсем недавно казавшийся невероятным в рамках традиционных стереотипов классической теории колебаний, сейчас представляется явлением фундаментальной значимости. Интерес к этой тематике продолжает нарастать, о чем свидетельствует поток научной информации в виде научных статей (например, [2] и библиография к ней). В частности, в работах [3, 4] приведено теоретическое обоснование результатов возмущенной модели. В докладах [4, 5] показаны возможные сценарии перехода к хаотическому движению в таких экологических системах через бифуркации. Помимо экологии, конкуренция субъектов экономической деятельности является одним из наиболее значимых процессов в экономике. Существует множество универсальных математических моделей взаимодействий [6–8], успешно применяющихся в разных отраслях науки, однако, точно описывающих конкурентные процессы современной рыночной экономики практически нет. Базовые модели [1, 8] были разработаны достаточно давно и не всегда верно описывают динамику современных конкурентных отношений. Изучение существующих математических моделей дает возможность найти оптимальные пути для построения новых модификаций исходных моделей, подходящих к данной ситуации развития конкуренции и экономики в целом. Модель Лотки-Вольтерра и ее обобщения широко используются, например, в монографии [9] по биологии и диссертациях [7], работах по экологии [10, 11] и экономике [12], где, в частности, показано, что после незначительной модификации трофической функции, модель адекватно описывает взаимоотношение секторов производства и поставок.

Теория предсказывает, что при наличии определенных типов внешних воздействий со стороны среды на такую систему, ее устойчивость может нарушаться, и движения приобретают квази-случайный вид [3, 4, 8].

3. Объект, цель и задачи исследования

Объектом исследования является процесс динамики сосуществования видов в среде их обитания с внешним воздействием; *предметом* исследования — модели типа Лотки-Вольтерра с возмущенной правой частью; *методом* — численные методы решения систем дифференциальных уравнений и анализа их устойчивости.

Цель работы — исследование и использование особенностей многомерных нелинейных эволюционных моделей для стабилизации их динамики.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

1. Выбрать «мягкую» модель, адекватно описывающую динамику взаимодействия акторов в экологических, экономических и других системах.
2. Рассмотреть особенности хаотизации поведения линейных и нелинейных моделей.
3. Путем численных экспериментов выявить параметры, отвечающие за устойчивую динамику системы.
4. Определить численные значения параметров:

а) устойчивого роста;

б) хаотической динамики.

5. Выбрать вид периодического возмущения.
6. Выполнить пункты 2 и 3 для возмущенных моделей.

4. Математическое описание

4.1. Базовая модель взаимодействия акторов. Рассматривается в малом ареале (остров) замкнутая экосистема из двух видов:

1) «жертвы» — в отсутствии хищников могут размножаться неограниченно;
2) «хищники» — размножение ограничено численностью жертв.

Численности тех и других, соответственно, x и y — достаточно велики, и меняется гладко во времени. Модель Лотки-Вольтерра для такой системы имеет вид:

$$\frac{dx}{dt}=rx-\gamma_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=-sy+\gamma_2 xy, \qquad (1)$$

где r, s, γ_1, γ_2 — положительные постоянные, в экологии часто называемые «мальтузианскими» и «трофическими» коэффициентами, соответственно.

С помощью замены переменных — переноса начала координат в ненулевую стационарную точку (x_*, y_*), система (1) преобразуется к виду:

$$\frac{d\xi}{dt}=-\gamma_1\left(x_*\eta+\xi\eta\right),$$
$$\frac{d\eta}{dt}=\gamma_2\left(y_*\xi+\xi\eta\right), \qquad (2)$$

которая имеет общий интеграл вида [8]:

$$\frac{e^{\xi/\gamma_1}e^{\eta/\gamma_2}}{\left[\gamma_1\left(\xi+x_*\right)\right]^{x_*/\gamma_1}\left[\gamma_2\left(\eta+y_*\right)\right]^{y_*/\gamma_2}}=C.$$

4.2. Модель конкуренции в экономических системах мульти-агентного типа. Сложность экономических систем превышает порог, до которого строится точная математическая теория. Поэтому неудивительно, что сколько-нибудь универсальных методов построения математических моделей в экономике не существует. Можно говорить лишь о некоторых общих принципах и требованиях к таким моделям. Основные из них [13]:

— адекватность (соответствие модели своему оригиналу);
— объективность (соответствие научных выводов реальным условиям);
— простота (не засоренность модели второстепенными факторами);
— чувствительность (способность модели реагировать изменению начальных параметров);
— устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи);
— универсальность (широта области применения) [14].

Формализация экономической задачи проводится наряду с принятием некоторых предварительных условий, предположений, ограничений. Ниже рассмотрена одна из таких моделей на основе развития базовой модели и подраздела 4.1 — модифицированная и расширенная математическая модель, описывающая конкурентные процессы в экономике, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a-bx),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(-c+dx).\end{cases} \qquad (3)$$

Полученную модификацию модели Лотки-Вольтерра (3) будем называть моделью «производитель-посредник». Она отличается от базовой модели лишь в первом уравнении.

Рассмотрим случай, когда добавляется еще один производитель (z и третье уравнение, аналогичное по смыслу первому):

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a-bx),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(-c+dx+gz),\\ \dfrac{dz}{dt}=z(e-fz).\end{cases} \qquad (4)$$

Соответственно, и в уравнение посредника добавился новый параметр, характеризующий коэффициент прибыли на перекупке товара нового производителя. В данной модели конкуренцией между производителями пренебрегаем. На графике рис. 1, отображена зависимость прибыли посредника (ордината) от 1-го и 2-го производителя (абсцисса).

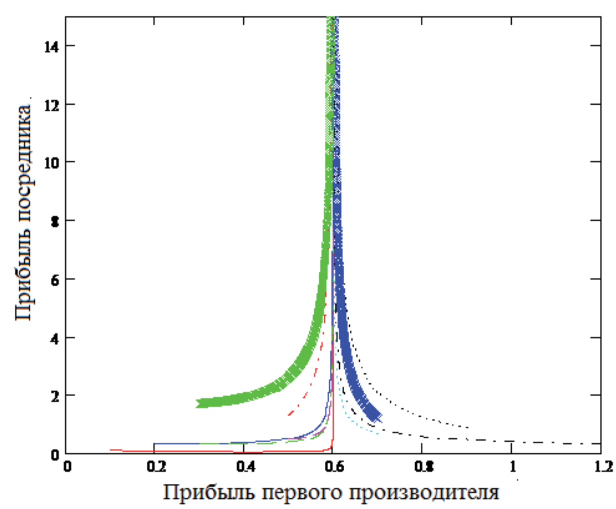

Рис. 1. Зависимость прибыли посредника от прибыли первого производителя при различных начальных условиях и параметрах: $a = 0{,}3$, $b = 0{,}5$, $c = 0{,}3$, $d = 0{,}4$, $e = 0{,}2$, $f = 0{,}4$, $g = 0{,}5$

График достаточно быстро выходит на стационар, прибыль посредника практически неограниченно растет.

Вывод: характер изменения прибыли посредника не зависит от количества производителей.

4.3. Исследование кейнсианской модели экономики. В классических исследованиях [15] все новые «синергетические» свойства и объекты появились и исследовались в системах нелинейных, но сравнительно малой размерности ($n \le 4$). Исследование многомерных систем приводит к сложностям как теоретическим, так и вычислительным. Ниже рассматривается модель экономической системы 6-го порядка [16]. Она линейна, однако проявляет сложное поведение, похожее на детерминированный хаос, известный в нелинейных системах. Похожие результаты для экономической системы с 2006 года активно обсуждались в Интернете [17]. В данной работе предложены модельные параметры экономик 3-х государств, при которых взаимодействие между экономиками приводит к фазовым портретам, похожим на детерминированный хаос типа резонансного тора. Отметим, что подобное поведение характерно не только для экономических, но и для любых конкурентных систем. Например, для эргатических систем типа «Человек — машина — среда», содержащих подсистему защиты от вредных воздействий и восстановления после аварий.

Рассмотрим динамику экономической системы, которая предложена Кейнсом [15]. Упрощенная модель делового цикла одного актора, согласно Кейнсу, описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = \alpha\{I(Y,R) - S(Y,R)\} = \alpha F(Y,R), \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta\{L(Y,R) - L_s\}. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь все параметры и переменные положительны и означают:

— Y — национальный доход;

— R — процентную ставку.

Введение в изолированные системы (5) фактора международной торговли $Ex_i = Ex_i(Y_j, Y_k)$, $(i \ne j,k)$, $\mathrm{Im}_i = \mathrm{Im}_i(Y_i)$ с помощью функций экспорта и импорта приводит к уравнениям (2):

$$\begin{cases} \dfrac{dY_i}{dt} = \alpha_i(I_i(Y_i,R_i) - S_i(Y_i,R_i)) + Ex_i(Y_j,Y_k) - \mathrm{Im}_i(Y_i), \\ \dfrac{dR_i}{dt} = \beta_i\left(L_i(Y_i,R_i) - \dfrac{M_i^*}{p_i}\right), \quad i,j,k = 1,2,3, \quad j,k \ne 1, \end{cases}$$

где M_i^* — фиксированное предложение денег в i-ой экономике, отражающее баланс платежных равновесий, i, j, $k = 1,.., n$ — индексы стран, n — количество стран, p_i есть уровень цен i-й страны.

В качестве первого приближения рассматриваем линейную модель: функции I, S, L для каждой экономики и их связи Ex, Im — линейны по всем своим аргументам.

Параметры взаимодействий можно подобрать [15] так, чтобы из шести собственных чисел два сопряженных имели действительную часть не отличимую от нуля (в третьем десятичном знаке), а остальные были малыми отрицательными. Сложное поведение экономик каждой страны видно из приведенных на рис. 2, 3 графиков проекций 6-мерных фазовых портретов и временные зависимости. Несмотря на «хаотичность» проекций фазового портрета, это — неустойчивый фокус с сигнатурой (–, –, +, +, –, –). Этот случай можно рассматривать как «слабо возбужденный тор», который на конечном, хотя и большом, отрезке времени дает поведение системы, не отличимое от хаоса.

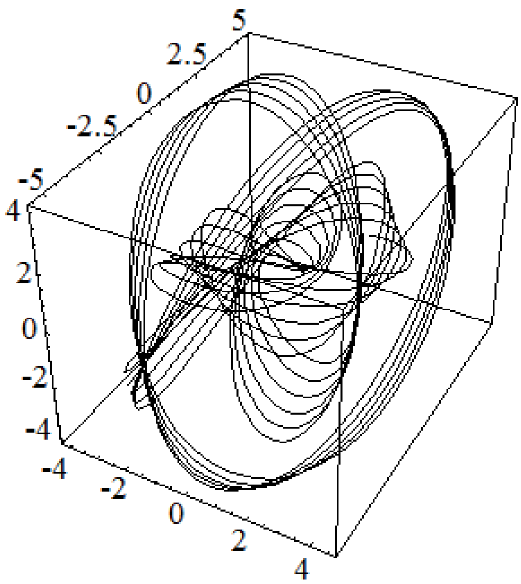

Рис. 2. Взаимодействие трех национальных доходов

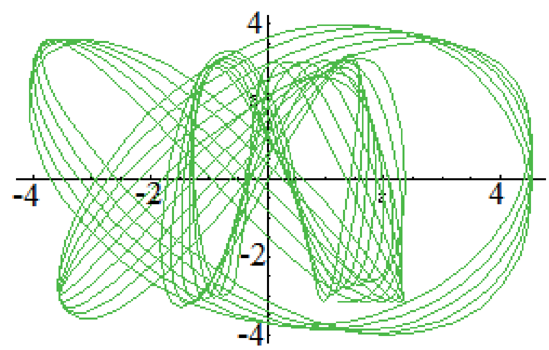

Рис. 3. Взаимодействие двух национальных доходов

Даже небольшая неустойчивость (показатель Ляпунова отличен от нуля лишь в 3-м знаке) экономики одной страны во всех случаях приводит к хаотической неустойчивости и возможному падению экономик всех трех стран (акторов).

4.4. Исследование нелинейных систем с квази-резонансным возмущением правой части. Первоначальная автономная система (1) возбуждается малым, по сравнению с остальными параметрами, периодическим колебанием размножения одного или обоих видов этой экосистемы.

Физические и биологические факторы могут вызывать периодическое изменение абсолютной и относительной скорости вымирания, как хищников, так и жертв. Для выявления результатов воздействия исследуем каждый фактор в отдельности. Пусть сначала периодическому воздействию подвергнется второе уравнение системы, описывающее динамику «хищников». Отметим, что система становится неавтономной.

$$\frac{dx}{dt}=rx-\gamma_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=-S(t)y+\gamma_2 xy+n\cos\Omega t, \qquad (6)$$

где $S(t)=s\left(1+\frac{n}{s}\cos\Omega t\right)$; Ω — частота периодических возмущений, близка к частоте предельного цикла без возмущений. При $n=0$ соответствующая (6) невозмущенная автономная система имеет нетривиальное состояние равновесия. С помощью замены переменных $\xi=x-x_*$, $x_*=s/\gamma_2$, $\eta=y-y_*$, $y_*=r/\gamma_1$ система (6) преобразуется к виду:

$$\frac{d\xi}{dt}=-\gamma_1(x_*\eta+\xi\eta),$$
$$\frac{d\eta}{dy}=\gamma_2(y_*\xi+\xi\eta)+(n-ny_*)\cos\Omega t-n\eta\cos\Omega t. \qquad (7)$$

После нормирования параметров $s=r=\gamma_1=\gamma_2=1$, уравнения (7) примут вид:

$$\frac{d\xi}{dt}=-(\eta+\xi\eta),$$
$$\frac{d\eta}{dt}=\xi+\xi\eta-n\eta\cos\Omega t. \qquad (8)$$

На рис. 4, 5 приведены результаты численного моделирования потери устойчивости циклов при начальных условиях $\xi_0=\eta_0=0{,}1$. Бифуркационное значение параметра n, очевидно нуль. При $n=0{,}1$ (рис. 4) виден неограниченный рост колебаний, а при $n=0{,}15$ уже наступает хаос (рис. 5). Начальные значения ξ_0, η_0 выбраны так, чтобы при $n=0$ траектория находилась в области притяжения к особой точке (x_*, y_*) в системе координат xOy.

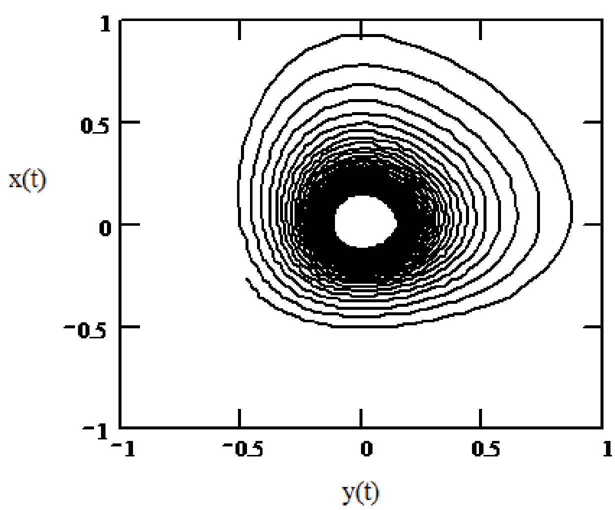

Рис. 4. Фазовый портрет динамики устойчивого роста системы при $n=0{,}1$

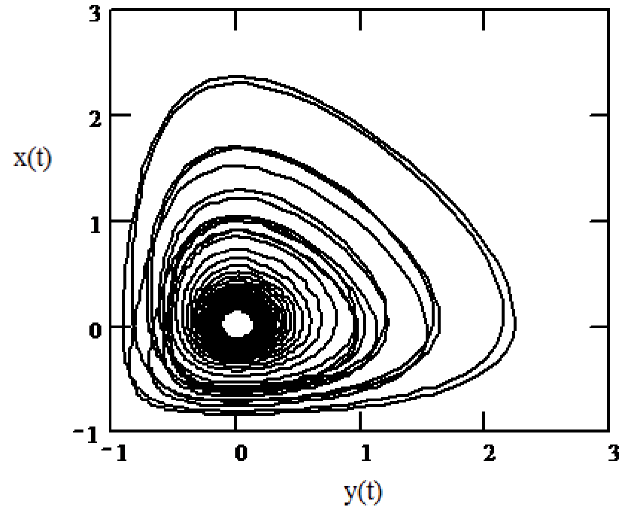

Рис. 5. Фазовый портрет хаотической динамики системы при $n=0{,}15$

Изменения динамики очевидны, как в фазовом пространстве, так и на графике решений, если сравнить рис. 4 и рис. 5. Причина появления хаоса здесь та же, что и для появления нерезонансного тора при размерности задач $n>2$. А именно, неавтономность системы в результате явно зависимого от времени периодического возмущения с периодом, несоизмеримым с периодом собственного движения. Заметим, что хаотические движения появляются не только в окрестности странных аттракторов, которых в данной задаче быть не может, ввиду ее малой размерности ($n=2$).

5. Обсуждение результатов исследования динамических систем конкурентного типа

Все результаты и выводы о поведении рассмотренных выше систем, кроме базовой модели из подраздела 4.1 получены в результате численного анализа, а значит содержат все достоинства и недостатки примененного метода. Отметим, что уравнения из подраздела 4.3, хотя и разрешимы аналитически, но собственные числа могут быть получены только численно. А значит, такое решение не имеет существенных преимуществ перед чисто численным.

Рассмотренные модели описывают три достаточно широких класса объектов экономики и экологии. Они иллюстрируют нарушение стабильности поведения объектов и объясняют возможные причины их хаотического поведения.

Работа является продолжением исследований [3, 4, 18] и позволяет применить используемый подход для описания взаимодействий более высокого, чем xy порядка.

6. Выводы

В работе, на основе анализа литературных источников и характерных признаков поведения объекта, выбраны три класса объектов и их динамические модели для дальнейшего исследования. Такие модели относится к типу «мягких». Они сохраняют все качественные особенности данного класса объектов и абстрагируется от вопросов о точности решений и их совпадений с динамикой конкретного объекта.

В результате проведенных исследований:

1. На базе модели Лотки-Вольтерра разработана математическая модель «производитель-посредник», описывающая конкурентные отношения между субъектами экономического рынка. Разработана модификация модели, включающая еще одного производителя.

2. Для анализа линейной модели Кейнса взаимосвязанной системы из 3-х государств-акторов, получены решения системы двумя методами — численно-аналитическим (т. е. собственные числа матрицы 6-го порядка получены численно, а затем выписана известная формула для решения линейной системы с постоянными коэффициентами) и численным — методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Сравнение решений показало, что дискретизация правомерна, и не является причиной хаотического поведения системы.

Полученные рисунки проекций и сечений фазовых портретов средствами пакета Mathematica позволяют представить себе торообразное по двум переменным 6-ти мерное пространство. Из фазовых портретов ясно, что притягивающее множество ограничено, и траектории на нем бесконечны, не являясь ни точками, ни циклами, т. е. выполнен основной критерий «странности» аттрактора. Похожие явления наблюдались и в 4-х мерной модели экономик двух государств. Таким образом искомое сочетание параметров было определено, и гипотеза о возможности хаоса в результате глобализации подтвердилась даже для простейшей модели.

3. Для третьего класса — системы с возмущением в качестве первого приближения выбраны синусоидальные возмущения скорости роста популяций. Это обосновано тем, что линеаризация невозмущенной модели имеет синусоидальные решения. Было подтверждено выдвинутое предположение о бифуркации при совпадении или близости периодов этих движений.

В результате численных экспериментов выявлены бифуркации при изменении как амплитуды n, так и периода возмущения Ω. Вариации трофических параметров невозмущенной системы, как известно для системы Лотки-Вольтерра, к бифуркациям не приводят.

Малое изменение амплитуды — в пределах 0,05 — приводит к переходу системы от периодических движений к устойчивому росту, и затем, к хаотическим колебаниям.

Литература

1. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтерра. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 288 с.
2. Jost, C. The wolves of Isle Royale display scale-invariant satiation and density dependent predation on moose [Text] / C. Jost, G. Devulder, J. A. Vucetich, R. Peterson, R. Arditi // Journal of Animal Ecology. — 2005. — Vol. 74, № 5. — P. 809–816. doi:10.1111/j.1365-2656.2005.00977.x
3. Мартынюк, А. А. Хаотическая потеря предельного цикла в задаче Вольтерра [Текст] / А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина // Доклады НАН Украины. — 1996. — № 4. — С. 1–7.
4. Никитина, Н. В. О хаотической потере устойчивости [Текст] / Н. В. Никитина // Доклады НАН Украины. — 1997. — № 11. — С. 61–65.
5. Hayashi, C. Bifurcations and the Generation of Chaotic States in the Solutions of Nonlinear Differential Equations [Text]: материалы 4-й Нац. конгр. / C. Hayashi, H. Kawakami // Теоретическая и прикладная механика. — Варна, София, 1981. — С. 537–542.
6. Hoppensteadt, F. Predator-prey model [Text] / F. Hoppensteadt // Scholarpedia. — 2006. — Vol. 1, № 10. — P. 1563. doi:10.4249/scholarpedia.1563
7. Сорокин, П. А. Моделирование биологических популяций с использованием комплексных моделей, включающих в себя индивидуум-ориентированные и аналитические компоненты [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / П. А. Сорокин. — Долгопрудный, 2004. — 153 с.
8. Эрроусмит, Д. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями [Текст] / Д. К. Эрроусмит, К. М. Плейс. — М.: Мир, 1986. — 243 с.
9. Brauer, F. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology [Text] / F. Brauer, C. Castillo-Chavez. — Springer-Verlag, 2001. — 201 p. doi:10.1007/978-1-4757-3516-1
10. Arditi, R. How Species Interact: Altering the Standard View on Trophic Ecology [Text] / R. Arditi, L. R. Ginzburg. — Oxford University Press, 2012. — 112 p.
11. Гусятников, П. П. Качественные и численные методы в задачах оптимального управления в моделях хищник-жертва и популяции леммингов [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / П. П. Гусятников. — Москва, 2006. — 101 с.
12. Nasritdinov, G. Limit cycle, trophic function and the dynamics of intersectoral interaction [Text] / G. Nasritdinov, R. T. Dalimov // Current Research J. of Economic Theory. — 2010. — Vol. 2, № 2. — P. 32–40.
13. Щербаковский, Г. З. Внутренний механизм конкуренции и конкурентные силы [Текст] / Г. З. Щербаковский. — М.: Экономика, 1997. — 178 с.
14. Dai, G. Coexistence Region and Global Dynamics of a Harvested Predator-Prey System [Text] / G. Dai, M. Tang // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1998. — Vol. 58, № 1. — P. 193–210. doi:10.1137/s0036139994275799
15. Занг, В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории [Текст] / В. Б. Занг. — М.: Мир, 1999. — 335 с.
16. Кейнс, Дж. Г. Избранные произведения [Текст] / Дж. Г. Кейнс. — М.: Экономика, 1993. — 430 с.
17. Линейная модель экономики с «нелинейными» эффектами [Электронный ресурс]. — Режим доступа: \www/URL: http://socintegrum.ru/forum/viewtopic.php?t=34&start=0&postdays=0&postorder=asc&highlight=
18. Наумейко, И. В. Модель конкуренции в системах типа «производитель-перекупщик» [Текст] / И. В. Наумейко, В. А. Альрефаи // ScienceRise. — 2014. — № 3/2(3). — С. 15–19. doi:10.15587/2313-8416.2014.28094

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З КОНКУРЕНТНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Досліджено ефекти фазового простуру системи диференціальних рівнянь типу Вольтерра, які описують взаємодію (кооперацію, конкуренцію та ін.) для двох чи більшого числа об'єктів, які історично прийнято звати «видами». Розглянуто додаткові особливості фазових портретів при слабких синусоїдальних зовнішніх впливах на швидкість «розмноження». Досліджено стійкість неавтономної системи. Знайдені чисельні рішення при дестабілізації моделі, коли частоти впливу близькі до частоти циклу незбуреної системи.

Ключові слова: взаємодія видів, модель Вольтерра, проблеми стійкості, атрактор, тор, збурення, хаос.

Альрефаи Валид Ахмед, *аспирант, кафедра прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина,* ***e-mail: wamralal@yahoo.com***.

Альрефаі Валід Ахмед, *аспірант, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна.*

Alrefai Waleed Ahmed, *Kharkiv National University of Radio Electronics, Ukraine,* ***e-mail: wamralal@yahoo.com***