

Гумен О. М.,
Мілейковський В. О.,
Дзюбенко В. Г.

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ НАВ'Є-СТОКСА ДЛЯ КАНАЛІВ ДВОКУТНОГО ПЕРЕРІЗУ

Запропоновано підхід до наближеного розв'язання рівняння Нав'є-Стокса для напірної течії в каналах двокутного перерізу. Показано, що використання параболічного профілю швидкості не дає необхідної точності для інженерних розрахунків. Отримано високу швидкість збіжності рівняння на запропонованій сітці. Визначено коефіцієнт поля швидкості та коефіцієнт опору тертя Дарсі. Запропоновані залежності для інженерного розрахунку ламінарних потоків у двокутних каналах.

Ключові слова: ламінарний потік, двокутний канал, теплоутилізація, полімерна плівка, полімерний теплообмінник, підземні води.

1. Вступ

Двокутні канали, переріз яких утворюється двома однаковими дугами кола, використовуються у теплообмінній техніці [1]. Зокрема, кафедрою теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури розроблено теплообмінник-теплоутилізатор, секції якого складаються з двох зварених листів полімерної плавки. У робочому стані канали теплообмінника набувають двокутного перерізу. Оскільки розміри каналу дорівнюють кільком сантиметрам, то при відповідному діапазоні швидкостей маємо ламінарний (безвихровий) режим руху. Таку ж форму мають окремі тріщини в гірських породах, якими рухаються ґрунтові води [2]. На сьогодні задача теоретичного розрахунку ламінарної течії [2] в такому каналі не вирішена.

Таким чином можна зробити висновок, що аналітичний опис ламінарної течії у двокутному каналі є необхідним при розробці теплообмінного обладнання та дослідження руху підземних вод.

Цим обґрунтовується актуальність проведення даних досліджень.

2. Аналіз літературних джерел і постановка проблеми

Для дослідження ламінарної течії використовуються рівняння Нав'є-Стокса [3]. Лише для круглого (віссиметричного) перерізу відомий значно більш простий підхід, що використовує закон зміни дотичних напружень τ Ньютона:

$$\tau = \mu d\omega / dr_c,$$

де μ — коефіцієнт динамічної в'язкості, ω — швидкість потоку, r_c — відстань до осі каналу. До цього рівняння долучається лінійний закон зміни дотичних напружень τ при віддаленні від осі перерізу. Таким чином обґрунтовується параболічний профіль швидкості.

Одна з перших спроб аналітично описати ламінарний потік у двокутному каналі [1] базується на повній

аналогії з круглим перерізом. Якщо поділити двокутний переріз великою віссю і розглянути лише одну половину, то вона матиме вигляд сегменту кола.

У роботі [1] до кожної половини перерізу (рис. 1) було застосовано профіль швидкості w , віднесений до середньої швидкості \bar{w} , у формі параболоїду обертаня (рис. 2). З точки зору гідродинаміки такий профіль неможливий, оскільки має злам на великій півосі. Тому вимагає перевірки та уточнення отриманий закон зміни коефіцієнта опору тертя (Дарсі) залежно від відношення радіусів та числа Рейнольдса:

$$Re = vd_e / \nu, \quad (1)$$

де ν — кінематична в'язкість потоку; d_e — еквівалентний діаметр, тобто чотири відношення площі до периметра. У випадку двокутного перерізу:

$$\tilde{d}_e = \frac{d_e}{R} = 2 \left(\tilde{r}_0 - \frac{\tilde{r}_1}{\tilde{r}_0 \arcsin(1/\tilde{r}_0)} \right), \quad (2)$$

де \tilde{r}_0 й \tilde{r}_1 — відповідно, відносний радіус кривини межі перерізу r_0 й відносна заглиблення r_1 центра дуги від великої осі, віднесені до довжини великої півосі R :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_0 &= r_0 / R = (1 + \tilde{r}^2) / (2\tilde{r}); \\ \tilde{r}_1 &= r_1 / R = (1 - \tilde{r}^2) / (2\tilde{r}); \quad \tilde{r} = r / R, \end{aligned} \quad (3)$$

де \tilde{r} — відносна довжина r малої півосі перерізу.

М. Г. Алішаєв [2] виконав розв'язання рівняння Нав'є-Стокса для окремих випадків некруглих перерізів — гострого кута, сектора круга, прямокутного тощо. Але для випадку двокутного перерізу розв'язок не було знайдено ані автором, ані в літературних джерелах. Таким чином, на сьогодні основним підходом до розв'язання рівняння Нав'є-Стокса залишається використання наближених чисельних методів.

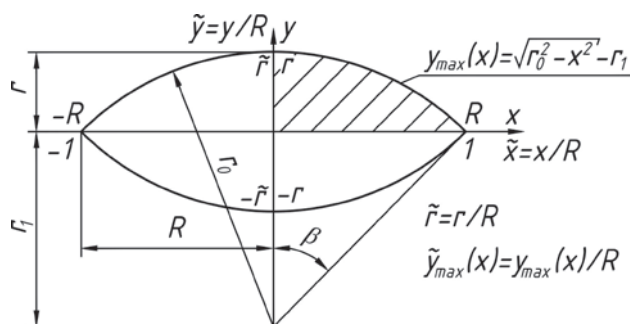


Рис. 1. Схема перерізу

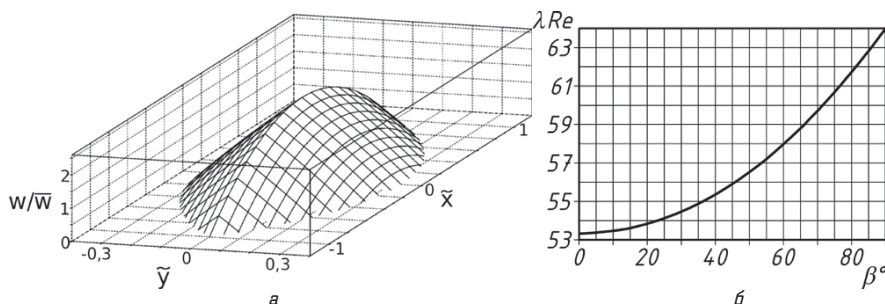


Рис. 2. Параболічний профіль швидкості: а — загальний вигляд; б — коефіцієнт опору тертя (Дарсі)

Основним підходом до інженерного розв'язання складних задач гідродинаміки є використання спеціалізованого програмного забезпечення для розрахунку ламінарних та турбулентних потоків [4–21], яке використовує метод скінченних елементів. Основною проблемою є висока вартість такого програмного забезпечення. Дві безкоштовні програми — OpenFOAM та FreeFOAM — вимагають ручної або напівавтоматичної побудови розрахункової сітки за допомогою спеціального програмного забезпечення.

Іншим підходом до розв'язання рівнянь є кінцево-різницький метод [22], що передбачає введення сітки та апроксимацію диференціалів приростами аргументів. Для рівнянь Пуассона (рівняння Рейнольдса рівномірної течії в трубопроводах мають цей тип) збіжність кінцево-різницьких схем легко доводиться. Але основною проблемою є велике число обумовленості системи рівнянь. Тобто малі зміни коефіцієнтів та обчислювальні похибки призводять до великих розбіжностей результатів.

Для розв'язання систем рівнянь великого обсягу найбільш доцільно користуватися спеціалізованим програмним забезпеченням. У даній роботі використано безкоштовну систему з відкритим кодом SciLab [23] та систему символічної алгебри Maxima [24], що розповсюджується на аналогічних умовах.

3. Об'єкт, мета та задачі дослідження

Об'єкт дослідження — ламінарний потік рідини в каналах двокутної форми, характерних для плівкових теплообмінників-теплоутилізаторів, тріщин гірських порід тощо.

Метою проведення досліджень була розробка наукових основ аналітичного визначення закономірностей ламінарної течії у двокутних каналах.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні основні задачі:

1. Сформулювати вимоги до математичної моделі напірної течії в каналі двокутного перерізу для забезпечення допустимої точності результатів.

2. Сформулювати концептуальну фізичну і математичну моделі напірної ламінарної течії у двокутному каналі.
3. Побудувати розрахункову сітку та реалізувати математичну модель руху в каналі двокутного перерізу.
4. Визначити залежність коефіцієнта опору тертя Дарсі від геометричних параметрів перерізу.

4. Забезпечення точності наближеного розв'язання рівняння Нав'є-Стокса

Якщо система рівнянь на сітці є погано обумовленою, вимагається абсолютно точне знання усіх коефіцієнтів.

Це накладає обмеження на математичну модель.

Рівняння мають бути приведені до безрозмірного вигляду, що не містить ані в диференціальних рівняннях, ані в граничних умовах: — результатів вимірювання будь-яких фізичних величин: геометричних розмірів, часу тощо. Наприклад, лінійні координати мають бути віднесені до розмірів перерізу; — експериментальних даних, точність яких завжди обмежена. Серед таких даних фундаментальні

фізичні константи та фізичні властивості робочих тіл. Такі дані мають вноситися у безрозмірні комплекси; — результатів розрахунків за іншими наближеними формулами та чисельними методами з обмеженою точністю.

Бажано побудувати сітку таким чином, щоб охопити межі перерізу з заданими граничними умовами першого роду. Таким чином, можна уникнути їхньої наближеної інтерполяції та додаткових рівнянь. Сітку слід ділити за таким законом, щоб з будь-якою точністю можна було визначити координати її вузлів.

У разі неможливості забезпечення окремих умов необхідно скористатися тим, що число обумовленості є узагальненим показником впливу похибки всіх коефіцієнтів. Воно дає можливість отримати лише верхню оцінку похибки. За природою воно не дає можливості точно оцінити внесок похибки кожного конкретного коефіцієнта рівняння на результат. Тому якщо в рівнянні є коефіцієнти з обмеженою, але відомою точністю, то результат можна перевірити шляхом розрахунку при різних значеннях коефіцієнта у межах довірчого інтервалу. Якщо розбіжність результату є допустимою, то такий результат вважається дійсним. Якщо вона недопустима, то розв'язок має бути визнаний недостовірним.

Другою проблемою розв'язання погано обумовлених систем рівнянь є обчислювальні похибки. Наприклад, метод Гауса [25] дає суттєві обчислювальні похибки навіть за добре обумовленої системи рівнянь. Серед точних методів достатньо якісний результат [25] дає LU — перетворення з вибором головного члена (LU — transformation with pivoting). Такий метод реалізований операцією «\» системи SciLab. За даними вбудованої довідки точний розв'язок знаходиться при числі обумовленості до $1/(10 \text{ eps})$, де $\text{eps} = 2,22 \cdot 10^{-16}$ — значення числа, яке містить лише одиницю в останньому розряді. Таким чином, число обумовленості може сягати $4,5 \cdot 10^{14}$.

Перевірити похибки конкретної реалізації чисельних методів можна на контрольних прикладах. Щоб

сформувавши контрольний приклад можна використати системи комп'ютерної символічної алгебри, у даній роботі — Maxima. Вони здатні знаходити точні розв'язки рівнянь з раціональними коефіцієнтами (найкраще у формі звичайної дробі). Таким чином були сформовані контрольні приклади систем рівнянь з числом обумовленості до 100 000. Розв'язок їх у SciLab для Windows, Linux та Android дав збіг до мінімум восьми значущих цифр, що є достатнім для розрахунку.

5. Побудова фізичної та математичної моделі ламінарного руху у двокутному каналі

Приймаємо ідеалізовану фізичну концептуальну модель ламінарної течії в каналі двокутного перерізу (рис. 1) площею A . Уводимо систему координат x, y , відповідно, вздовж великої та малої осей. Початок координат приймаємо в центрі перерізу. Середовище, яке рухається, будемо вважати ньютонівською нестисливою рідиною зі сталими фізичними властивостями — густиною ρ та кінематичною в'язкістю ν . Швидкість у кожній точці w спрямована в напрямку осі каналу z і є сталою при кожних зафіксованих значеннях x та y . Тиск p є незмінним у кожному живому перерізі та зменшується вздовж напрямку z за формулою Дарсі [26, 27]:

$$dp = \lambda (dz / d_e) \rho \bar{w}^2 / 2, \quad (4)$$

де λ — коефіцієнт опору тертя Дарсі, що є незмінним вздовж z .

Координати віднесемо до довжини великої півосі та позначимо тильдою:

$$\tilde{x} = x / R; \quad \tilde{y} = y / R; \quad \tilde{z} = z / R. \quad (5)$$

З урахуванням формул (3), (4) та (5) рівняння Нав'є-Стокса [3] набудуть вигляду:

$$\frac{1}{\nu \rho} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{\nu} \frac{\lambda}{d_e} \frac{\bar{w}^2}{2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{w_m}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right) = -\frac{\bar{w}}{k_w R^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right), \quad (6)$$

де \tilde{w} — відносна швидкість, віднесена до максимальної:

$$\tilde{w} = w / w_m; \quad (7)$$

w_m — швидкість теплоносія на осі перерізу, k_w — коефіцієнт поля швидкості:

$$k_w = \frac{\bar{w}}{w_m} = \frac{4}{A / R^2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\tilde{r}_0^2 - \tilde{x}^2} - \tilde{r}_1} \tilde{w} d\tilde{y} d\tilde{x}. \quad (8)$$

Рівняння (6) у безрозмірному вигляді з урахуванням припущення про усталеність і рівномірність потоку:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\lambda}{d_e} \frac{\bar{w}^2}{2} \frac{k_w R^2}{\bar{w}} = \frac{\bar{w} d_e}{\nu} \frac{\lambda}{2} \frac{k_w}{\bar{d}_e^2} = \text{Re}_w \frac{\lambda}{2} \frac{k_w}{\bar{d}_e^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} = -\Delta \tilde{w} = \text{const}, \quad (9)$$

де $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — оператор Лапласа або лапласіан.

З рівняння (9) лапласіан відносної швидкості дозволяє визначити коефіцієнт опору тертя Дарсі:

$$\lambda = -2 \Delta \tilde{w} \bar{d}_e^2 / (k_w \text{Re}_w). \quad (10)$$

На підтвердження правильності викладу розглянемо круглий трубопровід з профілем швидкості [26, 27] у формі параболоїда обертання ($\Delta \tilde{w} = -4, k_w = 1/2; \bar{d}_e = 2$). За рівнянням (10) маємо відому [26, 27] формулу:

$$\lambda = 64 / \text{Re}. \quad (11)$$

Розглянемо праву верхню чверть перерізу (рис. 1). Граничні умови:

$$\begin{cases} \tilde{w} = 0 & \text{при } \tilde{x} \leq 1, \tilde{y} = \tilde{y}_{\max}(\tilde{x}); \\ \tilde{w} = 1 & \text{при } \tilde{x} = \tilde{y} = 0; \\ d\tilde{w} / d\tilde{x} = 0 & \text{при } \tilde{x} = 0; \\ d\tilde{w} / d\tilde{y} = 0 & \text{при } \tilde{y} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Останні дві граничні умови (12) означають гладкість симетричного профілю швидкості, яка не дотримана при використанні профілю на рис. 2.

Введемо (рис. 3, $a-z$) на осі x сітку. Позначимо n — кількість вузлів, а $i = \{1, n\}$ — номер вузла від початку координат. Цей скорочений запис означає $i = 1, 2, \dots, n$. Початок нумерації з одиниці виконано згідно зі стандартом SciLab. Позначимо \tilde{x}_i — значення відносної абсциси у вузлі i . $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_n = 1$.

З кожного вузла сітки проводимо вертикальну i -ту лінію до межі перерізу. З отриманої кінцевої точки проводимо горизонтальну j -ту лінію до осі y . Таким чином на осі y одержуємо сітку з n вузлів, пронумерованих від початку координат $j = \{1, n\}$. $\tilde{y}_1 = 0, \tilde{y}_n = \tilde{r}$.

Будуємо плоску сітку на чверті перерізу. Кожен вузол (i, j) приймається на перетині i -ої вертикальної (серед яких 1-ша — вісь x) та j -ї горизонтальної (серед яких 1-ша — вісь y) лінії. Позначимо $\tilde{w}_{i,j}$ — відносну швидкість у вузлі (i, j) за залежністю (7). За граничними умовами (12) $\tilde{w}_{1,1} = 1, \tilde{w}_{i,n-i+1} = 0$.

Віддзеркалюємо вузли $(i, 2), i = \{1, n-1\}$, відносно осі x . Отримуємо фантомні вузли $(i, 0)$. Значення відносної швидкості в них за граничною умовою гладкості (12) $\tilde{w}_{i,0} = \tilde{w}_{i,2}$. Віддзеркалюємо вузли $(2, j), j = \{1, n-1\}$, відносно осі y . Отримуємо фантомні вузли $(0, j)$. Значення відносної швидкості в них, аналогічно, $\tilde{w}_{0,j} = \tilde{w}_{2,j}$. Таким чином, умова гладкості профілю замінюється не менш точною умовою симетрії. Основні типи сіток:

- однаковий крок вздовж осі x ;
- однакова довжина дуг між вузлами на межі перерізу. Сітка згущується від центру перерізу з мінімальним градієнтом швидкості до вершин. Пра-

вилу побудови отримане розв'язанням ΔABO_c та ΔO_cOI (рис. 3, д):

$$\tilde{x}_i = \tilde{r}_0 \sin((i-1)\arcsin(1/\tilde{r}_0)/(n-1)); \quad (13)$$

— синусова. При $\tilde{r}_0=1$ спостерігається найбільше згущення вищенаведеної сітки до вершини. Таке розбиття формально можна використати і за будь-якого значення \tilde{r}_0 . За рівнянням (13) при $\tilde{r}_0=1$ маємо:

$$\tilde{x}_i = \tilde{r}_0 \sin\left(\frac{\pi i-1}{2n-1}\right). \quad (14)$$

Приймаємо шаблон сітки «хрест» (рис. 3, е). Апроксимація лапласіану для вузла (i, j) має вигляд:

$$\begin{aligned} & (\partial^2 \tilde{w} / d\tilde{x}^2)_{i,j} + (\partial^2 \tilde{w} / d\tilde{y}^2)_{i,j} = \Delta \tilde{w} \approx \\ & \approx \frac{\tilde{w}_{i+1,j} - \tilde{w}_{i,j} - \tilde{w}_{i,j} + \tilde{w}_{i-1,j}}{(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1})/2} + \frac{\tilde{w}_{i,j+1} - \tilde{w}_{i,j} - \tilde{w}_{i,j} + \tilde{w}_{i,j-1}}{(\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_{j-1})/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Після перетворення рівняння (15) отримуємо загальну кінцево-різницеву форму рівняння (9):

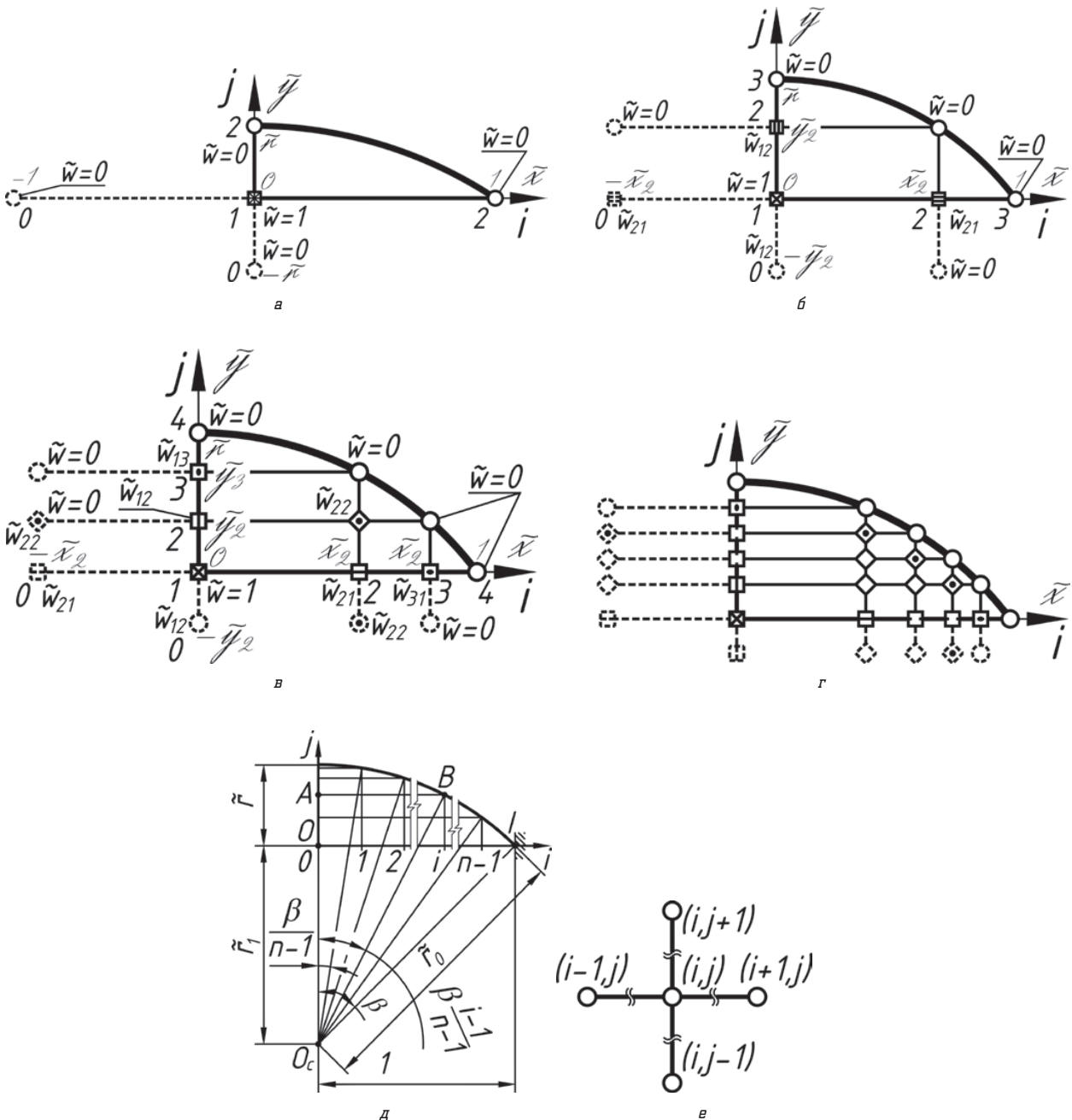


Рис. 3. Розрахункова сітка для розв'язання рівняння (9) для двоканального каналу: а — при $n = 2$; б — при $n = 3$; в — при $n = 4$; г — при $n \geq 5$; д — схема сітки при діленні довжини межі на рівні частини; е — шаблон сітки: рукописним шрифтом наведені відносні координати вузлів

$$\begin{aligned} & \tilde{w}_{i,j} \left(\frac{2}{(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i)(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})} + \frac{2}{(\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j)(\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1})} \right) - \\ & - \tilde{w}_{i+1,j} \frac{2}{(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i)(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1})} - \\ & - \tilde{w}_{i,j-1} \frac{2}{(\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1})(\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_{j-1})} - \\ & - \tilde{w}_{i,j+1} \frac{2}{(\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j)(\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_{j-1})} - \\ & - \tilde{w}_{i-1,j} \frac{2}{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1})} + \Delta\tilde{w} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Запис рівняння (16) виконується для кожного вузла сітки крім фантомних (позначених на рис. 3 пунктиром) та вузлів на межі перерізу (позначених « \circ » на рис. 3). Невідомими величинами є значення лапласіану $\Delta\tilde{w}$ (яке є константою в рівномірному стабілізованому потоку), а також відносні швидкості в усіх вузлах крім центрального ($\tilde{w}_{1,1} = 1$) і на межі перерізу ($\tilde{w}_{i,n-i+1} = 0$). Вигляд рівнянь для кожного вузла принципово залежить від того, які типи вузлів (фантомні, на межі перерізу, центральний) і в яких положеннях належать шаблону, побудованому на розглянутому вузлі. Тому на рис. 3 вузли з різними виглядами рівнянь позначені різними знаками.

Розглянемо найбільш простий випадок $n=2$. Відносна швидкість у всіх вузлах відома. Тому невідомим залишається лише лапласіан, який визначається тільки для центрального вузла (1, 1), позначеного « \boxtimes » на рис. 3. Рівняння (16) набуває вигляду:

$$\Delta\tilde{w} \approx -2(1 + \tilde{r}^{-2}). \quad (17)$$

Похибка рівняння (17) порівняно зі значеннями, отриманими на сітці при $n=100$ (рис. 4), достатня для інженерних розрахунків (до 5 %) лише при $\tilde{r} \geq 0,779$ та при $\tilde{r} \leq 0,296$. Для отримання похибки не більше 0,12 % вводиться поправка. Формула (17) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{w} & \approx -2(1 + \tilde{r}^{-2}) - (2,163 - 1,17\tilde{r})(1 - \tilde{r}) = \\ & = (3,333 - 1,17\tilde{r})\tilde{r} - 2\tilde{r}^{-2} - 4,163. \end{aligned} \quad (18)$$

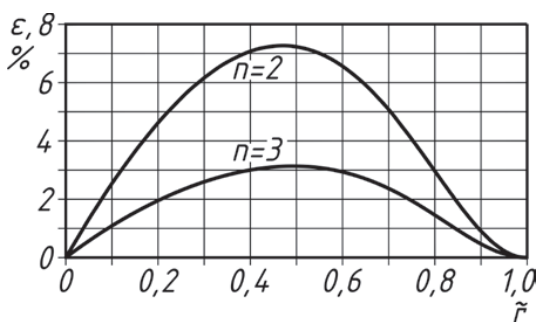


Рис. 4. Відносна похибка формул (17) та (23)

Розглянемо випадок $n=3$ (рис. 3, б). Рівняння (16) для центрального вузла (1, 1), який позначений « \boxtimes », має вигляд:

$$-2\tilde{w}_{2,1}\tilde{x}_2^{-2} - 2\tilde{w}_{1,2}\tilde{y}_2^{-2} + \Delta\tilde{w} = -2\tilde{x}_2^{-2} - 2\tilde{y}_2^{-2}. \quad (19)$$

Для вузлів (2,1) та (1,2), позначених, відповідно, « \boxminus » та « \boxplus », маємо, відповідно:

$$2\tilde{w}_{2,1} \left(\frac{1}{(1-\tilde{x})\tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{y}^2} \right) + \Delta\tilde{w} = \frac{2}{\tilde{x}}, \quad (20)$$

$$2\tilde{w}_{1,2} \left(\frac{1}{(\tilde{r}-\tilde{y})\tilde{y}} + \frac{1}{\tilde{x}^2} \right) + \Delta\tilde{w} = \frac{2}{\tilde{r}\tilde{y}}. \quad (21)$$

Система рівнянь (19), (20) та (21) має найбільш простий розв'язок при $\tilde{x} = \tilde{y}$. З урахуванням рівняння межі перерізу (рис. 1):

$$\tilde{x} = \tilde{y} = \frac{\sqrt{\tilde{r}^2 + 2} - \tilde{r}_1}{2}. \quad (22)$$

З використанням залежності (22) розв'язок системи рівнянь (19), (20) та (21) набуває вигляду:

$$\Delta\tilde{w} = -2 \frac{\tilde{r}^2(2 - \tilde{x}_2(1 - \tilde{x}_2)) - \tilde{x}_2(\tilde{r} - \tilde{x}_2)}{\tilde{r}\tilde{x}_2^2(3\tilde{r} - \tilde{x}_2(\tilde{r} + 1))}. \quad (23)$$

Похибка рівняння (23) порівняно зі значеннями, отриманими на сітці при $n=100$ (рис. 4), достатня для інженерних розрахунків і не перевищує 3,14 %. Однак більш простою залишається формула (18).

Розглянемо випадок $n=4$. Центральний вузол принципово не відрізняється від попереднього випадку. Тому рівняння (19) залишається справедливим. Суміжні з ним вузли на осях (2,1) — « \boxminus » та (1,2) — « \boxplus » — суттєво відрізняються від попереднього випадку. Вони не мають сусідніх вузлів на межі перерізу. Рівняння (16) для цих вузлів має вигляд:

$$\begin{aligned} & 2\tilde{w}_{2,1} \left(\frac{1}{(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2)\tilde{x}_2} + \frac{1}{\tilde{y}_2^2} \right) - \tilde{w}_{2,2} \frac{2}{\tilde{y}_2^2} - \\ & - \tilde{w}_{3,1} \frac{2}{(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2)\tilde{x}_3} + \Delta\tilde{w} = \frac{2}{\tilde{x}_2\tilde{x}_3}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & 2\tilde{w}_{1,2} \left(\frac{1}{(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2)\tilde{y}_2} + \frac{1}{\tilde{x}_2^2} \right) - \tilde{w}_{2,2} \frac{2}{\tilde{x}_2^2} - \\ & - \tilde{w}_{1,3} \frac{2}{(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2)\tilde{y}_3} + \Delta\tilde{w} = \frac{2}{\tilde{y}_2\tilde{y}_3}. \end{aligned} \quad (25)$$

На осях залишаються по одному вузлу, суміжному з межею перерізу: $(n-1,1)$ — « \boxminus » — та $(1,n-1)$ — « \boxplus ». Рівняння (16) має загальний вигляд (у даному випадку $n=4$):

$$\begin{aligned} & 2\tilde{w}_{n-1,1} \left(\frac{1}{(1-\tilde{x}_{n-1})(\tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_{n-2})} + \frac{1}{\tilde{y}_2^2} \right) - \\ & - \tilde{w}_{n-2,1} \frac{2}{(\tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_{n-2})(1 - \tilde{x}_{n-2})} + \Delta\tilde{w} = 0; \end{aligned} \quad (26)$$

$$2\tilde{w}_{1,n-1} \left(\frac{1}{(\tilde{r}-\tilde{y}_{n-1})(\tilde{y}_{n-1}-\tilde{y}_{n-2})} + \frac{1}{\tilde{x}_2^2} \right) - \tilde{w}_{1,n-2} \frac{2}{(\tilde{y}_{n-1}-\tilde{y}_{n-2})(\tilde{r}-\tilde{y}_{n-2})} + \Delta\tilde{w} = 0. \quad (27)$$

Залишився останній вузол (2,2) в перерізі, суміжний з двома вузлами на межі, який позначений « \blacklozenge ». Рівняння (16) для подібних вузлів має загальний вигляд (у даному випадку $i=2, n=4$):

$$2\tilde{w}_{i,n-i} \left(\frac{1}{(\tilde{x}_{i+1}-\tilde{x}_i)(\tilde{x}_i-\tilde{x}_{i-1})} + \frac{1}{(\tilde{y}_{n-i+1}-\tilde{y}_{n-i})(\tilde{y}_{n-i}-\tilde{y}_{n-i-1})} \right) - \tilde{w}_{i-1,n-i} \frac{2}{(\tilde{x}_i-\tilde{x}_{i-1})(\tilde{x}_{i+1}-\tilde{x}_{i-1})} - \tilde{w}_{i,n-i-1} \frac{2}{(\tilde{y}_{n-i}-\tilde{y}_{n-i-1})(\tilde{x}_{n-i+1}-\tilde{x}_{n-i-1})} + \Delta\tilde{w} = 0. \quad (28)$$

Авторам не вдалося підібрати такі положення проміжних вузлів сітки, щоб одержати з системи рівнянь (19), (24), (25), (26), (27) та (28) зручну формулу для інженерних розрахунків. Рівномірне ділення вузлами довжини межі перерізу дозволяє отримати лапласіан з похибкою до 0,89 %.

Розглянемо останній випадок $n \geq 5$. Цей випадок додає три типи вузлів. На двох осях з'являються відповідні два типи вузлів, які не межують ані з центральним вузлом, ані з вузлами на межі. Для осі x ці вузли мають нумерацію $(i,1)$, $i = \{3, n-2\}$ та позначені « \blacksquare ». Для осі y ці вузли мають нумерацію $(1,j)$, $j = \{3, n-2\}$ та позначені « \blacktriangleright ». Рівняння (16) набуває вигляду, відповідно:

$$2\tilde{w}_{i,1} \left(\frac{1}{(\tilde{x}_{i+1}-\tilde{x}_i)(\tilde{x}_i-\tilde{x}_{i-1})} + \frac{1}{\tilde{y}_2^2} \right) - \tilde{w}_{i,2} \frac{2}{\tilde{y}_2^2} - \tilde{w}_{i-1,1} \frac{2}{(\tilde{x}_i-\tilde{x}_{i-1})(\tilde{x}_{i+1}-\tilde{x}_{i-1})} - \tilde{w}_{i+1,1} \frac{2}{(\tilde{x}_{i+1}-\tilde{x}_i)(\tilde{x}_{i+1}-\tilde{x}_{i-1})} + \Delta\tilde{w} = 0, \quad (29)$$

$$2\tilde{w}_{1,j} \left(\frac{1}{(\tilde{y}_{j+1}-\tilde{y}_j)(\tilde{y}_j-\tilde{y}_{j-1})} + \frac{1}{\tilde{x}_2^2} \right) - \tilde{w}_{2,j} \frac{2}{\tilde{x}_2^2} - \tilde{w}_{1,j-1} \frac{2}{(\tilde{y}_j-\tilde{y}_{j-1})(\tilde{y}_{j+1}-\tilde{y}_{j-1})} - \tilde{w}_{1,j+1} \frac{2}{(\tilde{y}_{j+1}-\tilde{y}_j)(\tilde{y}_{j+1}-\tilde{y}_{j-1})} + \Delta\tilde{w} = 0. \quad (30)$$

Третій додатковий тип вузлів – вузли, що не мають жодного сусіднього вузла на осях та на межі перерізу. Вони позначені « \blacklozenge ». Рівняння (16) для таких вузлів використовується в повному обсязі. Рівняння (16), (19), (24), (25), (26), (27), (28), (29) та (30) розв'язуються таким способом. Усім вузлам, для яких слід записати рівняння, присвоюється номер c за правилом:

$$c = (n-0,5i)(i-1) + j. \quad (31)$$

Визначається загальна кількість вузлів сітки N підстановкою $i=n-1, j=1$ до рівняння (31). У системі SciLab створюються: розріджена нульова матриця A розміром $N \times N$ для лівих частин та нульова матриця B розміром $N \times 1$ для правих частин. Розріджені матриці зберігають лише ненульові елементи. Перший стовпчик матриці A зарезервованій для коефіцієнтів при лапласіані. Він одразу заповнюється одиницями. Кожен c -й ($c > 1$) стовпчик матриці A призначається для коефіцієнтів при відносній швидкості c -го вузла. Кожен рядок обох матриць призначений для коефіцієнтів одного з рівнянь (порядок не має значення).

Далі для кожного вузла (крім фантомних та тих, що на межі) підраховуються коефіцієнти відповідного рівняння (16), (19), (24), (25), (26), (27), (28), (29) або (30) і вносяться до відповідних елементів матриць. Розв'язання рівнянь виконується командою `Sol=umfpack(A, "\", B)`. Ця команда виконує праве ділення « \backslash » (тобто розв'язання системи рівнянь шляхом LU -перетворення з вибором головного компонента) над розрідженими матрицями. Далі відбувається декодування індексів за правилом, що отримане з рівняння (31):

$$\begin{cases} i = \left\lfloor \left[n + 0,5 - \sqrt{(n-0,5)^2 - 2(c-1)} \right] \right\rfloor; \\ j = c - (n - (i/2))(i-1), \end{cases} \quad (32)$$

де $\lfloor a \rfloor$ – позначення К. Айверсона [28] для функції «підлога» або заокруглення a до найближчого меншого цілого числа (з урахуванням знаку: $\lfloor 3,14 \rfloor = 3, \lfloor -3,14 \rfloor = -4$). Створюється $n \times n$ матриця результатів. Згідно з рівнянням (32) до неї заносяться результати розв'язання рівняння.

Результати розрахунків (рис. 5 та рис. 6) показують високу швидкість збігу лапласіану при згущенні сітки. Найкращим варіантом побудови сітки серед запропонованих є однакова довжина дуг (рис. 3, δ) між вузлами на межі перерізу – за формулою (13). Використання рівняння (14) дає менш точний результат (рис. 5). Для більшості задач достатню точність дає сітка з $n=3$ та відповідне рівняння (23). Сітка при $n=4$ забезпечує розв'язання переважної більшості інших задач (похибка не перевищує 0,89 %). Але в будь-якому разі більш ефективно користуватися формулою (18).

Для визначення коефіцієнта опору тертя Дарсі слід обчислити коефіцієнт поля швидкості шляхом чисельного інтегрування профілю швидкості. Для цього слід апроксимувати двовимірний профіль швидкості. Для чисельного подвійного інтегрування використовуються інтерполяційні підходи [22]. Підвищення степеню інтерполяційних багаточленів підвищує точність для одномірного випадку. Однак, значне підвищення степеню створює проблеми.

Наприклад, метод Ньютона-Котеса (інтерполяція поліномом довільного степеню з рівним кроком) вже при десятому порядку має від'ємні вагові коефіцієнти [22]. Однак, висока швидкість збіжності лапласіану дозволяє припустити і високу збіжність коефіцієнта поля швидкості. Тому очікується використання грубих сіток. Це вимагає максимально високого степеню апроксимації, що використовує всі відомі вузли.

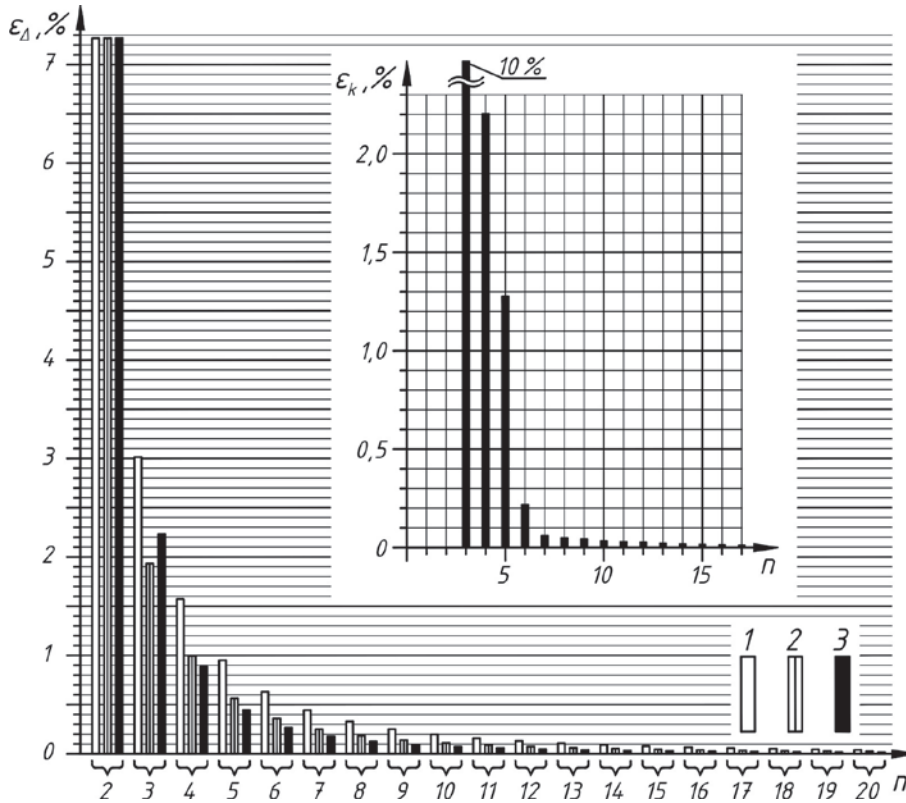


Рис. 5. Максимальна відносна похибка, %, лапласіану ϵ_{Δ} та коефіцієнта поля швидкості ϵ_k , на сітці за правилом: 1 — однаковий крок вздовж x ; 2 — синусова; 3 — однакова довжина дуг між вузлами на межі перерізу

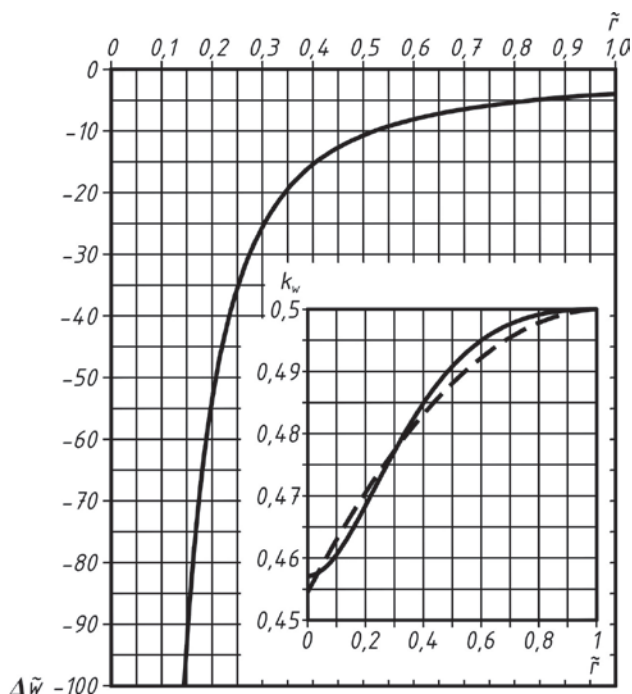


Рис. 6. Значення лапласіану відносної швидкості $\Delta\tilde{w}$ та значення коефіцієнта поля швидкості k_w : пунктир — за рівнянням (35)

При інтегруванні доцільно ввести нові координати, щоб відобразити область інтегрування в прямокутну. Вводимо нові координати зі зміною ординати від нуля до одиниці. Формули заміни координат та якобіан:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \tilde{x}; \\ \tilde{Y} &= \frac{\sqrt{\tilde{r}_0^2 - \tilde{x}^2} - \tilde{r}_1 - \tilde{y}}{\sqrt{\tilde{r}_0^2 - \tilde{x}^2} - \tilde{r}_1}; \\ \frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(\tilde{X}, \tilde{Y})} &= -(\sqrt{\tilde{r}_0^2 - \tilde{x}^2} - \tilde{r}_1). \end{aligned} \quad (33)$$

Апроксимаційний багаточлен у координатах (33):

$$\tilde{w} \approx \sum_{P=1}^{n-1} \sum_{\xi=0}^{P-1} a_{\xi, P-\xi} X^{\xi} Y^{P-\xi}, \quad (34)$$

забезпечує нульове значення на межі перерізу, оскільки не має членів без Y .

У загальному вигляді за довільного степеню точне інтегрування апроксимаційного багаточлена (34) дає рекурентні формули, що швидко втрачають обчислювальну стійкість при зростанні порядку. Тому використано чисельне інтегрування функцією «intg» SciLab. Таким чином реалізується адаптивна квадратура з абсолютною похибкою не більше 10–14 та відносною похибкою не більше

10–8. Ця похибка на порядки менша за похибку інтерполяції та в подальшому не враховується.

Під час апроксимації виявлено, що швидкість збіжності коефіцієнта поля не менша за лапласіану. При зростанні кількості точок система рівнянь апроксимації стає погано обумовленою. Але використання розв'язувача за методом найменших квадратів (lsq) не порушує рівномірності збіжності коефіцієнта поля швидкості, оскільки інтегрування стійке до незначних похибок функції. Коли система SciLab сама обирає метод розрахунку (оператор «\»), робота програми уповільнюється практично вдвічі, а з підвищенням кількості вузлів виникає помилка нестачі стеку. Тому запропоновано використовувати розв'язувач lsq для всіх випадків без втрати точності.

Висока швидкість збіжності лапласіану та коефіцієнта поля швидкості (рис. 5) пояснюється особливостями форми профілю швидкості та вдало підібраним багаточленом (34). Значення коефіцієнта поля швидкості (рис. 6) добре описується апроксимаційною залежністю з похибкою до 0,58 %:

$$k_w = 0,4544 + 0,08906\tilde{r} - 0,04346\tilde{r}^2. \quad (35)$$

6. Визначення гідравлічного опору двокутного каналу

За рівняннями (1), (2), (10), (13) та (14) отриманий наближений розв'язок рівняння (9) дає значення добутку λRe в межах 62,22 ... 64,06 (рис. 7). Пропо-

нується апроксимаційна формула з похибкою до 0,1 % або до $\pm 0,06 / \text{Re}$:

$$\lambda = \begin{cases} 64 / \text{Re} & \text{при } \bar{r} \geq 0,67, \\ \left(64 - 1,825 \left(1 - \frac{\bar{r}}{0,67} \right)^3 \left(1 + 3 \frac{\bar{r}}{0,67} \right) \right) / \text{Re} & \text{при } \bar{r} < 0,67. \end{cases} \quad (36)$$

Стиковка у формулі (36) забезпечує двічі гладку криву (рис. 7). Порівняння рис. 2, б та рис. 7 показує, що використання параболічного профілю швидкості дає похибку коефіцієнта опору тертя Дарсі до 14,3 %, що не задовольняє підвищенню вимоги щодо енергоефективності інженерних рішень.

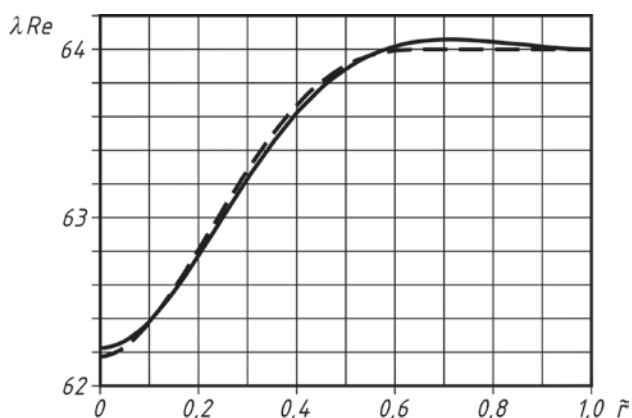


Рис. 7. Значення λRe : суцільна лінія — за результатами розв'язання рівняння на сітці; пунктир — за апроксимаційною формулою (36)

При цьому, як слідує з розрахунків, для інженерного розрахунку ламінарного потоку у двокутних каналах рекомендується використовувати формулу (11) для круглих напірних трубопроводів з похибкою до 2,86 %. У разі, якщо така похибка є недостатньою, рекомендується більш точна апроксимаційна залежність (36) або рис. 7.

7. Обговорення результатів дослідження ламінарних течій в каналах двокутного перерізу

Запропонований підхід до розв'язання рівняння Нав'є-Стокса дозволяє описати профіль швидкості та втрати тиску ламінарного потоку в каналах двокутного перерізу з достатньою точністю для інженерних розрахунків та наукових досліджень. Запропонована розрахункова сітка та підхід до інтегрування профілю швидкості враховують особливості геометричної форми перерізу й розподілу швидкості в ньому. Тому отримана висока швидкість збіжності чисельного методу. Це дозволяє швидко виконувати оптимізацію розмірів теплообмінних пристроїв та моделювати потоки підземних вод в складних розгалужених каналах. Отримані інженерні апроксимаційні формули для розв'язання інженерних задач, пов'язаних з двокутними каналами. Недоліком даного дослідження є ускладнення розрахунку профілів температури. Це пояснюється тим, що профіль температури визначається з недостатньо добре обумовленої системи рівнянь на сітці, що містить наближені результати розрахунку профілю швидкості. Однак, як показали дослідження,

для більшості випадків достатня кількість вузлів сітки — 30...200, що забезпечує збіжність профілю швидкості до 8 і більше значущих цифр. Даний недолік можна усунути лише, якщо знайти точний аналітичний розв'язок рівняння Нав'є-Стокса для даного випадку, однак на сьогодні ця задача не вирішена (але і не доведено, що такого розв'язку не існує).

Виконані дослідження корисні при розробці плівкового теплообмінного обладнання, при математичному моделюванні руху підземних вод для забезпечення питною водою населених пунктів, для геотермальної енергетики тощо. Такі полімерні теплообмінники корисні для утилізації теплоти агресивних парогазових сумішей (наприклад, продуктів згоряння), води різної мінералізації (геотермальне тепlopостачання, холодопостачання ґрунтовими водами тощо).

Ці дослідження є продовженням дослідження плівкового теплообмінника, проведеного на кафедрі теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури [1]. На сьогодні завершуються дослідження тепловіддачі у каналах такої форми та виконано оптимізацію розмірів перерізу плівкових теплообмінників для потреб індивідуального тепlopостачання.

8. Висновки

1. Запропоновано фізичну концептуальну модель та підхід до математичного опису напірної ламінарної усталеної стабілізованої течії у двокутних каналах, характерних для плівкових теплообмінників та ґрунтових вод. Отримані залежності для інженерного розрахунку даного типу течій.

2. Показано, що параболічний профіль швидкості, характерний для круглих трубопроводів, не забезпечує достатню точність для інженерних розрахунків. Такий профіль втрачає гладкість, що не відповідає фізичному змісту.

Література

- Кезля, Е. А. Воздухонагреватель из полимерной пленки для систем воздушного отопления теплиц [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 25.23.03 / Евгений Алексеевич Кезля; КИСИ. — К., 1988. — 20 с.
- Алишаев, М. Г. Точные решения ламинарного движения вязкой жидкости по прямолинейным трубам некруглых сечений [Электронный ресурс] / М. Г. Алишаев // Дагестанские электронные математические известия: Научно-образовательный журнал. — 2013. — Т. 1. — С. 88–102. — Режим доступа: \www/URL: <http://mathreports.ru/static?id=130>
- Хмельник, С. И. Уравнение Навье-Стокса. Существование и метод поиска глобального решения [Текст] / С. И. Хмельник. — Израиль: МиС, 2010. — 108 с.
- Алямовский, А. А. SolidWorks 2007/2008. Компьютерное моделирование в инженерной практике [Текст] / А. А. Алямовский, А. А. Собачкин, Е. В. Одинцов, А. И. Харитонович, Н. Б. Пономарев. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 1040 с.
- Ströher, G. R. Avaliação de modelos RANS de turbulência para o problema de jato livre circular axissimétrico [Text] / G. R. Ströher, J. F. Nicoletti, E. L. Zapparoli, G. L. Ströher, C. R. de Andrade // Acta Scientiarum. Technology. — 2011. — Vol. 33, № 4. — P. 425–433. doi:10.4025/actascitechnol.v33i4.8312
- Topcu, O. CFD-DP Modeling of Multiphase Flow in Dense Medium Cyclone [Text] / Okan Topcu // CFD Letters. — 2012. — Vol. 4, № 1. — P. 33–42.
- Subodh Bahirat. CFD Analysis of Plate Fin Tube Heat Exchanger for Various Fin Inclinations [Text] / Subodh Bahirat, P. V. Joshi // International Journal of Engineering Research and Applications. — 2014. — Vol. 4, № 8. — P. 116–125.

8. Al-Dulaimy, F. M. Assessment of two phase flow in a venture convergent-divergent nozzle [Text] / Fayadh M. Al-Dulaimy // Tikrit Journal of Engineering Science. — 2013. — Vol. 15, № 2. — P. 17–31.
9. Saeed Baghdar Hosseini. The Experimental and Simulations Effect of Air Swirler on Pollutants from Biodiesel Combustion [Text] / Saeed Baghdar Hosseini, Mahdi Ahmadvand, Ramin Haghighi Khoshkhoo, Hassan Khosravi // Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology. — 2013. — Vol. 5, № 18. — P. 4556–4562.
10. Kayne, A. Computational fluid dynamics modeling of mixed convection flows in buildings enclosures [Text] / A. Kayne, R. Agarwal // International Journal of Energy and Environment. — 2013. — Vol. 4, № 6. — P. 911–932. doi:10.1115/es2013-18026
11. Pimpun Tongpun. Investigation of entrance length in circular and noncircular conduits by computational fluid dynamics simulation [Text] / Pimpun Tongpun, Eakarach Bumrunghthai-chaichan, Santi Wattanusorn // Songklanakarin Journal of Science and Technology. — 2014. — Vol. 36, № 4. — P. 471–475.
12. Rajat Gupta. CFD study of a twisted blade H-Darrieus wind turbine [Text] / Rajat Gupta, Rituraj Gautam, Siddhartha Sankar Deka // International Journal of Energy and Environment. — 2014. — Vol. 5, № 4. — P. 505–520.
13. Cheng, W. Research on Eddy Air-Curtain Dust Controlled Flow Field in Hard Rock Mechanized Driving Face [Text] / W. Cheng, W. Nie, G. Zhou, J. Yang // Journal of Networks. — 2013. — Vol. 8, № 2. — P. 453–460. doi:10.4304/jnw.8.2.453-460
14. Li, Z. Development of DMC controllers for temperature control of a room deploying the displacement ventilation HVAC system [Text] / Z. Li, R. Agarwal, H. Gao // International Journal of Energy and Environment. — 2013. — Vol. 4, № 3. — P. 415–426. doi:10.1115/es2012-91007
15. Hallanger, A. FD Wake Modelling with a BEM Wind Turbine Sub-Model [Text] / A. Hallanger, I. O. Sand // Modeling, Identification and Control: A Norwegian Research Bulletin. — 2013. — Vol. 34, № 1. — P. 19–33. doi:10.4173/mic.2013.1.3
16. Ramzi, M. Passive Control via Slotted Blading in a Compressor Cascade at Stall Condition [Text] / M. Ramzi, G. AbdErrahmane // Journal of Applied Fluid Mechanics. — 2013. — Vol. 6, № 4. — P. 571–580.
17. Harinaldi. Modification of flow structure over a van model by suction flow control to reduce aerodynamics drag [Text] / Harinaldi, Budiawarso, Warjito, Engkos Achmad Kosasih, Rustan Tarakka, Sabar Pangihutan Simanungkalit, I Gusti Made Fredy Lay Teryanto // Makara Seri Teknologi. — 2012. — Vol. 16, № 1. — P. 15–21. doi:10.7454/mst.v16i1.1021
18. Khudheyer, A. F. Numerical analysis of fin-tube plate heat exchanger by using CFD technique [Text] / Ahmed F. Khudheyer, Mahmoud Sh. Mahmoud // Journal of Engineering and Applied Sciences. — 2011. — Vol. 6, № 7. — P. 1–12.
19. Marzouk, O. A. E. David Huckaby. Simulation of a Swirling Gas-Particle Flow Using Different k-epsilon Models and Particle-Parcel Relationships [Text] / Osama A. Marzouk, E. David Huckaby // Engineering Letters. — 2010. — Vol. 18, № 1. — P. 56–67.
20. Алямовский, А. А. SolidWorks Simulation. Как решать практические задачи / А. А. Алямовский. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 448 с.
21. Mooney, K. Getting Started with OpenFOAM Technology [Electronic resource] / K. Mooney, J. Höpken, T. Maric. — Birmingham-Mumbai: PAKT Publishing, 2014. — 59 p. — Available at: \www/URL: <https://www.safaribooksonline.com/library/view/getting-started-with/9781782161769/>
22. Бабенко, К. И. Основы численного анализа [Текст] / К. И. Бабенко. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 848 с.
23. Алексеев, Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач [Текст] / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. — М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 260 с.
24. Чичкарёв, Е. А. Компьютерная математика с Maxima [Текст] / Е. А. Чичкарёв. — М.: ALT Linux, 2012. — 384 с.
25. Walter, E. Numerical Methods and Optimization: a Consumer Guide [Text] / E. Walter. — Springer, 2014. — 476 p. doi:10.1007/978-3-319-07671-3
26. Спасский, К. Н. Гидравлика и гидравлические машины [Текст]: учебник / К. Н. Спасский, Е. Н. Лелеева. — М.: МГОУ, 2009. — 176 с.
27. Гудилин, Н. С. Гидравлика и гидропривод [Текст]: учеб. пос. для ВУЗов / Н. С. Гудилин, Е. М. Кривенко, Б. С. Маховиков, И. Л. Пастоев; под общ. ред. И. Л. Пастоева. — 4-е изд., стер. — М.: Изд-во «Горная книга», Изд-во Московского государственного горного университета, 2007. — 519 с.
28. Graham, R. Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science [Text] / R. Graham, D. Knuth, O. Patashnic. — Ed. 2. — Addison-Wesley, 1998. — 657 p.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ КАНАЛОВ ДВУУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Предложен подход к приближенному решению уравнения Навье-Стокса для напорного течения в каналах двугульного сечения. Показано, что использование параболического профиля скорости не даёт необходимой точности для инженерных расчётов. Получена высокая скорость сходимости уравнения на предложенной сетке. Определён коэффициент поля скорости и коэффициент сопротивления трения Дарси. Предложены зависимости для инженерного расчёта ламинарных потоков в двугульных каналах.

Ключевые слова: ламинарный поток, двугульный канал, теплоутилизация, полимерная плёнка, полимерный теплообменник, подземные воды.

Гумен Елена Николаївна, доктор технічних наук, професор, член Міжнародної асоціації геометрії та графіки (ISGG), кафедра нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Україна, e-mail: gumens@ukr.net.

Мілейковський Віктор Олександрович, кандидат технічних наук, доцент, член Міжнародної асоціації геометрії та графіки (ISGG), кафедра теплогазопостачання і вентиляції, Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна, e-mail: mileikovskiy@gmail.com.

Дзюбенко Володимир Григорович, старший викладач, полковник, кафедра охорони праці та навколишнього середовища, Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна.

Гумен Елена Николаевна, доктор технических наук, профессор, член Международной ассоциации геометрии и графики (ISGG), кафедра начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина.

Милейковский Виктор Александрович, кандидат технических наук, доцент, член Международной ассоциации геометрии и графики (ISGG), кафедра теплогазоснабжения и вентиляции, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина.

Дзюбенко Владимир Григорьевич, старший преподаватель, полковник, кафедра охраны труда и окружающей среды, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина.

Gumen Olena, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine, e-mail: gumens@ukr.net.

Mileikovskiy Viktor, Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine, e-mail: mileikovskiy@gmail.com.

Dziubenko Volodymyr, Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine