



Гуляр О. І.,  
Пискунов С. О.,  
Андрієвський В. П.,  
Шкриль О. О.

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ НАПІВАНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Наведені основні розрахункові співвідношення та алгоритм розв'язання просторових задач нестационарної теплопровідності для призматичних тіл складної форми поперечного перерізу на основі напіваналітичного методу скінченних елементів. Розроблена методика реалізована у вигляді проблемно-орієнтованої підсистеми для комп'ютерного моделювання нестационарних теплових процесів. Проведені чисельні дослідження достовірності отримуваних результатів на основі розробленої методики шляхом розв'язання тестових прикладів.

**Ключові слова:** напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ), нестационарна теплопровідність, криволінійна система координат.

### 1. Вступ

Значна кількість відповідальних об'єктів сучасної техніки в процесі експлуатації знаходиться в режимі розігріву або охолодження, що пов'язано з умовами їх запуску або аварійними ситуаціями. Це стосується, в першу чергу, об'єктів традиційної та атомної енергетики. До них відносяться парові, парогазові турбіни, стаціонарні та нестационарні газотурбінні установки і захисні корпуси ядерних реакторів. Режим їх роботи передбачає зміну напружено-деформованого стану від характеру розподілення температури в часі. Тому достовірне визначення температурних полів згаданих об'єктів є актуальною проблемою, яку в рамках сучасних підходів можливо ефективно розв'язати виключно на основі метода скінченних елементів. Це питання було висвітлено ще в класичній монографії Зенкевича [1] і не втратило своєї актуальності і на сьогоднішній день, про що свідчить вихід навчальних посібників типу [2].

### 2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Важливість розв'язання просторової задачі нестационарної теплопровідності для широкого загалу дослідників наглядно підтверджується тим фактом, що це закладено в найбільш розповсюджених комплексах методу скінченних елементів [3–5]. Підтвердження цього можна проілюструвати посиланням на публікації [6–8], в яких для отримання результатів розв'язку просторової задачі нестационарної теплопровідності використана система АВАQUS. В зазначених комплексах в якості одного з ефективних варіантів розв'язку просторових задач реалізовано напіваналітичний варіант методу скінченних елементів, але, в основному, тільки для задач про напружено-деформований стан. В той же час, практика проведення чисельних розрахунків показує, що найбільш ефективним при визначенні параметрів напружено-деформованого стану в часі в умовах змінного теплового режиму є використання однотипних скінченних еле-

ментів, як при розв'язку задачі теплопровідності, так і при розв'язку задачі термопружності.

В межах НМСЕ такий підхід було розроблено для розв'язку задач нестационарної теплопровідності замкнених тіл обертання і для визначення на цій основі змінних параметрів напружено-деформованого стану в часі [9]. Його ефективність наглядно ілюструється дослідженнями закономірностей поведінки температурних полів та напружено-деформованого стану в задачі моделювання режиму аварійного охолодження захисного корпусу ядерного реактору.

### 3. Об'єкт, ціль та задачі дослідження

Значну кількість важливих об'єктів енергетичного машинобудування становлять призматичні тіла складної форми поперечного перетину. До таких тіл можна віднести лопатки, хвостовики різних типів, ялинкові з'єднання і т. п. деталі парових і газотурбінних установок. Накопичений досвід використання НМСЕ для їх розрахунків при ізотермічному навантаженні [10] дає підстави для подальшого його розвитку в напрямку розробки методики розв'язання просторової нестационарної задачі теплопровідності для призматичних тіл складної форми, що становить мету даної роботи.

Для досягнення поставленої мети вирішувалися наступні задачі:

- провести вибір відповідних за змістом і формою вихідних співвідношень просторової задачі нестационарної теплопровідності в криволінійній системі координат;
- отримати формули для визначення елементів матриць теплопровідності і теплоємності на основі НМСЕ;
- реалізувати ефективний алгоритм на основі методу скінченних різниць для розв'язання системи диференціальних рівнянь;
- реалізувати отриманні співвідношення НМСЕ і алгоритм у вигляді проблемно-орієнтованої підсистеми для комп'ютерного моделювання нестационарних теплових процесів;

— обґрунтувати достовірність результатів шляхом розв'язку контрольних прикладів.

#### 4. Результати дослідження розв'язання просторових задач нестационарної теплопровідності

**4.1. Розв'язувальні співвідношення НМСЕ для просторової задачі нестационарної теплопровідності.** Температурне поле неоднорідного ізотропного просторового тіла об'ємом  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$  описується рівнянням нестационарної теплопровідності [11]:

$$\operatorname{div}(\lambda_T \nabla T) + q_0 = C_V \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

де  $\lambda_T$  — коефіцієнт теплопровідності;  $T$  — температура в точці тіла, що розглядається;  $q_0$  — щільність виділення тепла внутрішніми джерелами за одиницю часу;  $C_V$  — питома об'ємна теплоємність матеріалу тіла.

В криволінійній системі координат компонентна форма диференційного рівняння (1) приймає вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \lambda_T(T) g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial x^j} \right) + q_0 = C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

Однозначність розв'язання рівняння (2) забезпечується введенням відповідних початкових та граничних умов. В якості початкових умов приймається відоме розподілення температури в тілі в деякий фіксований момент часу  $t_0$ , що приймається за початок часової координати:

$$T(x^i, t_0) = T_0(x^i), \quad x^i \in V, \quad (3)$$

де  $T_0(x^i)$  — задана функція просторових координат.

Граничні умови в теорії теплопровідності формуються в вигляді трьох ідеалізованих типів теплопередачі на границі тіла:

1. Відомі зміни з часом температури точок поверхні тіла:

$$T(x^i, t) = f(x^i, t), \quad x^i \in S_1, \quad (4)$$

де  $f(x^i, t)$  — задана функція;  $S_1$  — частина поверхні тіла  $S$ , на якій задані граничні умови першого роду.

2. Відома щільність теплового потоку з поверхні тіла в зовнішнє середовище:

$$q(x^i, t) = -\lambda_T(T) \frac{\partial T(x^i, t)}{\partial n}, \quad x^i \in S_2, \quad (5)$$

де  $n$  — зовнішня нормаль до поверхні тіла в точці  $x^i$ ;  $S_2$  — частина поверхні тіла  $S$ , на якій задані граничні умови другого роду.

3. Відома температура зовнішнього середовища  $\theta$  і закон конвекційного теплообміну між поверхнею тіла і зовнішнім середовищем:

$$-\lambda_T(T) \frac{\partial T(x^i, t)}{\partial n} = \alpha(T) [T(x^i, t) - \theta(x^i, t)], \quad x^i \in S_3, \quad (6)$$

де  $\alpha(T)$  — коефіцієнт тепловіддачі;  $S_3$  — частина поверхні тіла  $S$ , на якій задані граничні умови третього роду.

Рівняння (2) з початковими (3) і граничними (4)–(6) умовами однозначно визначає нестационарне температурне поле в тілі, властивості якого в загальному випадку залежать від просторових координат і температури.

Диференційне рівняння (2) з граничними умовами (4)–(6) еквівалентне варіаційному рівнянню просторової задачі нестационарної теплопровідності:

$$\delta \chi = \int_V \left( \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial \delta T}{\partial x^j} g^{ij} + q_0 \delta T \right) dV + \int_S \alpha(T - \theta) \delta T dS - \int_V C_V \frac{\partial T}{\partial t} \delta T dV = 0. \quad (7)$$

Для призматичних просторових тіл в прийнятій місцевій системі координат  $x^i$  варіаційне рівняння (7) має вигляд:

$$\delta \chi = \int_V \left( \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} + \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^3} \frac{\partial \delta T}{\partial x^3} g^{33} + q_0 \delta T \right) dV + \int_S \alpha(T - \theta) \delta T dS - \int_V C_V \frac{\partial T}{\partial t} \delta T dV = 0. \quad (8)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1, 2, а позначені латинськими — 1, 2, 3.

Для чисельного розв'язання задач теплопровідності розроблений неоднорідний призматичний скінченний елемент, конфігурація якого є аналогічною СЕ для задач термов'язкопружнопластичного деформування [10]. Загальний вигляд цього СЕ в базисній і місцевій системах координат наведений на рис. 1, а, б відповідно.

В межах поперечного перерізу СЕ передбачається, що коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_T$ , гранична питома об'ємна теплоємність матеріалу тіла  $C_V$  та компоненти метричного тензора  $g^{ij}$  змінюються незначно і приймаються рівними відповідному значенню в центрі перерізу:

$$\lambda_T = \overset{\circ}{\lambda}_T = \lambda_T|_{x^\alpha=0}, \quad C_V = \overset{\circ}{C}_V = C_V|_{x^\alpha=0}, \quad g^{ij} = \overset{\circ}{g}^{ij} = g^{ij}|_{x^\alpha=0}, \quad (9)$$

а в напрямку твірної коефіцієнт теплопровідності та питома об'ємна теплоємність матеріалу передбачається змінним:

$$\lambda_T = \lambda_T(x^3), \quad C_V = C_V(x^3). \quad (10)$$

В якості невідомих при розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності приймається значення температури в вузлах елемента  $T_{(S_1, S_2)}$ .

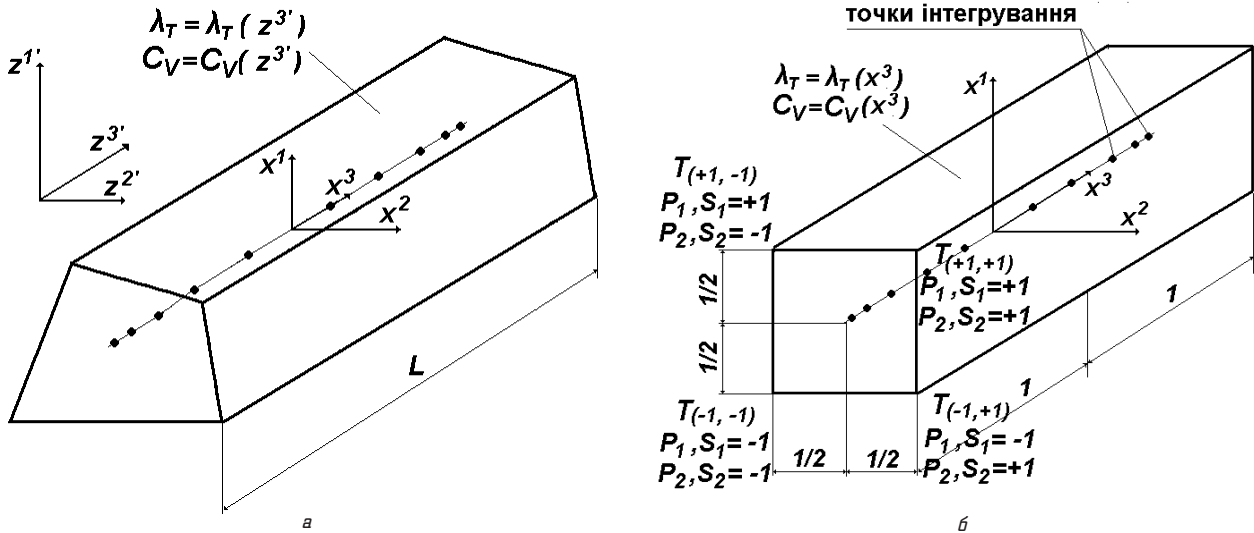


Рис. 1. Неоднорідний призматичний скінченний елемент для розв'язання задач теплопровідності: а — в базисній системі координат, б — в місцевій системі координат

Розподілення температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (11)$$

Вирази для похідних від температури у межах поперечного перетину СЕ мають вигляд:

$$T_{,\alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_{\alpha};$$

$$T_{,3} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2),3} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (12)$$

В напрямку твірної температура та її похідні по напрямку  $x^3$  апроксимуються аналогічно до [10]:

$$T = \sum_{l=0}^L T^l \phi^{(l)}, \quad T_{,3} = \sum_{l=0}^L T^l \phi_{,3}^{(l)}, \quad (13)$$

При застосуванні базисної декартової системи координат для призматичних тіл в виразі (8) для першого складника  $\delta \chi_n$  необхідно врахувати значення компонент метричного тензора  $g^{13} = g^{23} = 0$ . В цьому випадку отримаємо:

$$\delta A_n = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \lambda_T \left( \frac{\partial T}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \delta T}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta} + \frac{\partial T}{\partial x^3} \frac{\partial \delta T}{\partial x^3} g^{33} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (14)$$

Після підстановки до цього виразу представлення значень температури (11) та її похідних (12) в поперечному перерізі отримаємо:

$$\delta A_n = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \lambda_T \left[ \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left( T_{(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_{\alpha} \right) \times \right. \\ \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left( \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_{\beta} \right) g^{\alpha\beta} + \\ \left. + \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2),3} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \times \right. \\ \left. \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \delta T_{(P_1, P_2),3} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) g^{33} \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (15)$$

Грунтуючись на введених гіпотезах про постійність теплофізичних і геометричних характеристик в межах поперечного перерізу СЕ та використовуючи наступні інтеграли:

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1; \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^{\alpha} dx^1 dx^2 = 0;$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^{\alpha} x^{\beta} dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta, \end{cases}$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^{\alpha} x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0;$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} (x^1)^2 (x^2)^2 dx^1 dx^2 = \frac{1}{144}, \quad (16)$$

отримаємо:

$$\delta A_n = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \lambda_T \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left[ T_{(S_1, S_2)} \times \right. \\ \times \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{4} S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 g^{\alpha\alpha} \right) + \\ \left. + T_{(S_1, S_2), 3} \delta T_{(P_1, P_2), 3} \left( \frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) g^{33} \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (17)$$

Використовуючи апроксимацію температури та її похідні по напрямку  $x^3$  (13), отримаємо:

$$\delta A_n = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \lambda_T \left[ T_{(S_1, S_2)}^l \delta T_{(P_1, P_2)}^m \times \right. \\ \times \left[ \left( \frac{1}{4} S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 g^{\alpha\alpha} \right) \phi^{(l)} \phi^{(m)} + \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) g^{33} \phi_3^{(l)} \phi_3^{(m)} \right] \right] \sqrt{g} dx^3, \quad (18)$$

або в матричному вигляді:

$$\delta A_n = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \left[ \delta \{T\}_m^T [A]_{lm} \{T\}_l + \delta \{T\}_m^T [A_{,3}]_{lm} \{T\}_l \right], \quad (19)$$

де  $\{T\}_l^T = \{T_{(-l,-1)}^l, T_{(l,-1)}^l, T_{(-l,1)}^l, T_{(l,1)}^l\}$  – вектор температури;  $[A]$  і  $[A_{,3}]$  – матриці теплопровідності призматичного СЕ, що обчислюються за формулами:

$$[A]_{lm} = \left( \frac{1}{4} S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 g^{\alpha\alpha} \right) \sqrt{g} \lambda_{lm}; \\ [A_{,3}]_{lm} = \left( \frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) g_{33} \sqrt{g} \lambda_{lm,3}, \quad (20)$$

де

$$\lambda_{lm} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \lambda_T \phi^{(l)} \phi^{(m)} dx^3 = \sum_{k=1}^K \lambda_{T_k} \phi_k^{(l)} \phi_k^{(m)} H_k, \\ \lambda_{lm,3} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \lambda_T \phi_3^{(l)} \phi_3^{(m)} dx^3 = \sum_{k=1}^K \lambda_{T_k} \left( \phi_3^{(l)} \right)_k \left( \phi_3^{(m)} \right)_k H_k.$$

Аналогічно проводяться обчислення для інших складників рівняння (8). Після проведення всіх обчислень

складників та в силу довільності варіацій  $\delta T$  рівняння (8) можна представити системою звичайних диференціальних рівнянь з перемінними коефіцієнтами:

$$\sum_{i=1}^M \left[ \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left[ -C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} \frac{dT_{(S_1, S_2)}^m}{dt} + \left[ A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}^{lm} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}^{lm} \right] T_{(S_1, S_2)}^l \right] \right]_i = \sum_{i=1}^M \{Q_0^m\}_i, \quad m = 0, 1, \dots, L, \quad (21)$$

де компоненти вектора правих частин, які характеризуються інтенсивністю зовнішньої теплової дії:

$$Q_0^m = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \sum_{P_1} \sum_{P_2} -q_{(S_1, S_2)}^m \left( \frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) + \\ + \sum_{l=0}^L B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}^{lm} \theta^l, \quad (22)$$

коефіцієнти матриці теплопровідності:

$$A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}^{lm} = \left[ a S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta} \left[ (1 - \delta_\beta^\alpha) \frac{3}{4} S_1 P_1 + \frac{3}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{3} S_1 S_2 P_1 P_2 + 2 \frac{1}{4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_\beta^\alpha \frac{1}{4} S_1 P_1 + \frac{1}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{3}{4} \right] \sqrt{g}, \right. \\ \left. \frac{1}{(S_\alpha P_\alpha + 3)(S_\beta P_\beta + 3)} \right] \sqrt{g}, \quad (23)$$

коефіцієнти матриці теплоємності:

$$C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \left( \frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) \sqrt{g}. \quad (24)$$

додаткові члени коефіцієнтів матриці теплопровідності для скінченних елементів, що примикають до граничної поверхні, що співпадає з координатною лінією  $x^n$ :

$$B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \frac{a}{C_V} \frac{S_\alpha P_\alpha + 3}{12} \sqrt{g^{(3-\alpha)(3-\alpha)}} \sqrt{g}. \quad (25)$$

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь (21) приймається метод скінченних різниць. Вздовж часової координати  $t$  вибирається скінченна множина  $N$  точок  $t_n$  ( $n=0, 1, \dots, N$ ) з кроком  $\Delta t_n$  таким чином, щоб  $t_n|_{n=0} = t_n$ ;  $t_n|_{n=N} = t_n$ . Замінюючи похідну за часом в (21) скінченно-різницею алгоритмом другого порядку точності за схемою Кранка-Ніколсона [12] і приймаючи в якості невідомих амплітудні значення температури в вузлах сіткової області в момент часу  $t_{n+1}$ , маємо систему алгебраїчних рівнянь відносно  $T_{(S_1, S_2)}^{n+1}$ :

$$[C] \{T\}_{n+1} + [A] \{T\}_{n+1} = [C] \{T\}_n - [A] \{T\}_n + \{Q_0\}_n. \quad (26)$$

**4.2. Достовірність результатів при розв'язанні задач теплопровідності для призматичних тіл на основі НМСЕ.** З метою доведення вірогідності результатів розв'язку задачі теплопровідності з використанням отриманих співвідношень розглянуто тестову задачу про теплопровідність циліндричної стінки. Вихідні дані:  $r_1 = 10$  мм,  $r_2 = 40$  мм, температура на внутрішній поверхні стінки  $T_1 = 100$  °С, температура на зовнішній поверхні стінки  $T_2 = 400$  °С.

Дискретна модель МСЕ наведена на рис. 2, а. Поверхні вздовж осей  $z^1$  та  $z^2$  абсолютно теплоізолювані. В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок, отриманий в роботі [13]. Як видно, отримані результати (табл. 1) майже повністю збігаються з еталонним розв'язком.

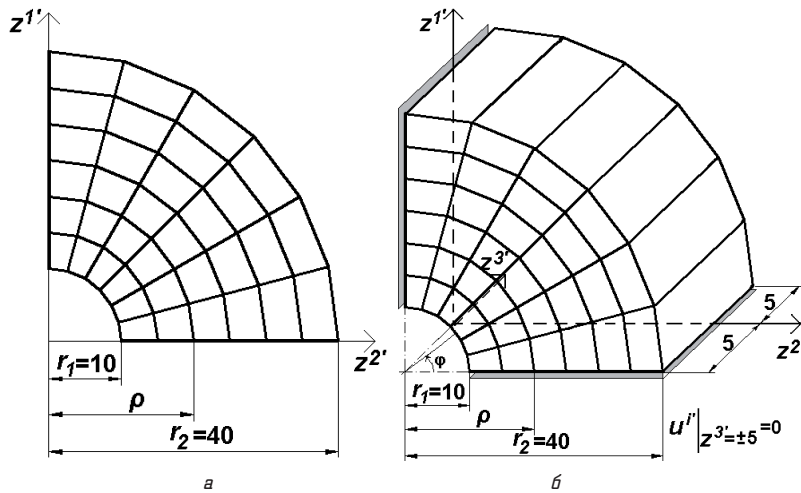


Рис. 2. Дискретна модель для циліндричної стінки: а — МСЕ; б — НМСЕ

Таблиця 1

Порівняння результатів розрахунку

$\rho$ , мм	Температура $T$ , °С			Похибка, %	
	Аналітично [13]	МСЕ	НМСЕ	МСЕ	НМСЕ
10	100	100	100	0	0
15	187,74	186,62	186,68	0,60	0,56
20	250	247,87	247,93	0,85	0,83
25	298,27	296,12	296,15	0,72	0,71
30	337,74	336,62	336,65	0,33	0,32
35	371,10	370,33	370,36	0,21	0,20
40	400	400	400	0	0

На наступному етапі, з метою доведення вірогідності отримуваних на основі НМСЕ результатів, було розглянуто тестову задачу про теплопровідність призматичного стрижня. Вихідні дані: температура на торцях стрижня  $T(z^2 = 0) = 100$  °С,  $T(z^2 = 30) = 400$  °С. Поверхні вздовж інших граней абсолютно теплоізолювані.

В якості еталонного прийнятий розв'язок, отриманий на основі МСЕ. Як видно з наведеного графіка розподілення температури вздовж осі стрижня (рис. 3, а), результати отримані використанням дискретної моделі НМСЕ (рис. 3, б) повністю збігаються із еталонним розв'язком (рис. 4).

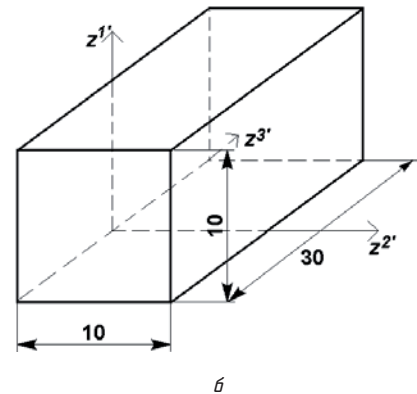
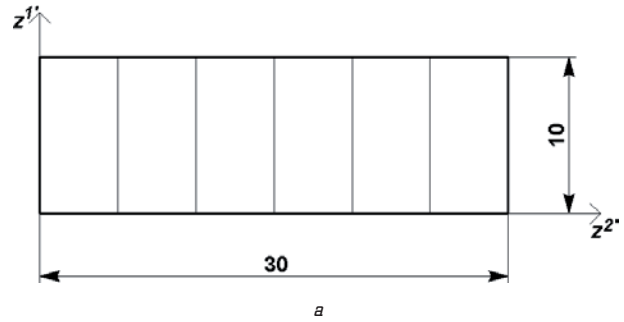


Рис. 3. Дискретні моделі призматичного стрижня: а — МСЕ, б — НМСЕ

На наступному етапі досліджуємо розподілення температури по товщині необмеженої сталевій пластині при конвекційному теплообміні між її поверхнею  $z^1 = +h/2$  і навколишнім середовищем. Поверхня  $z^1 = -h/2$  передбачається ідеально теплоізолюваною.

Початкова температура пластини  $T_0 = 293$  °К, температура теплоносія  $\theta = 1273$  °К, коефіцієнт теплопровідності  $\alpha = 0,66 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/сек. Критерій теплової подібності, що відповідає товщині пластини  $h = 0,008$  м,  $B_i = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} = 0,2$ .

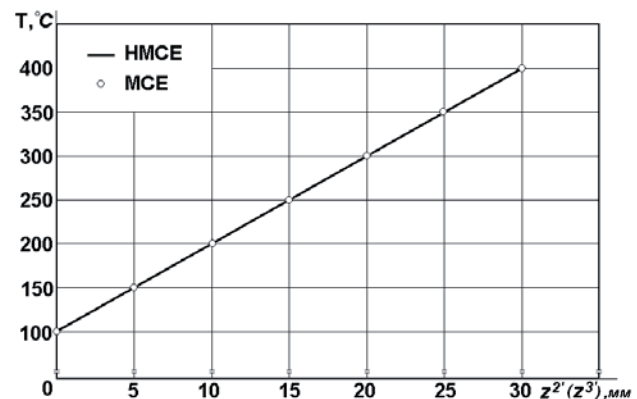


Рис. 4. Графік розподілення температури вздовж осі стрижня (в напрямку  $z^2$  для МСЕ,  $z^3$  для НМСЕ)

На рис. 5 в вигляді ізоліній показано розподілення температури по товщині пластині для моментів часу  $t = 0$  сек, 0,5 сек, 1 сек, 5 сек, 10 сек, 15 сек, 20 сек, 30 сек, 60 сек. Суцільна лінія відповідає аналітичному



розв'язку [11], кружечками відмічено результати розв'язання, які отримані в роботі [14], а штрихпунктирна лінія відповідає рішенню, отриманому за розробленою методикою на основі НМСЕ.

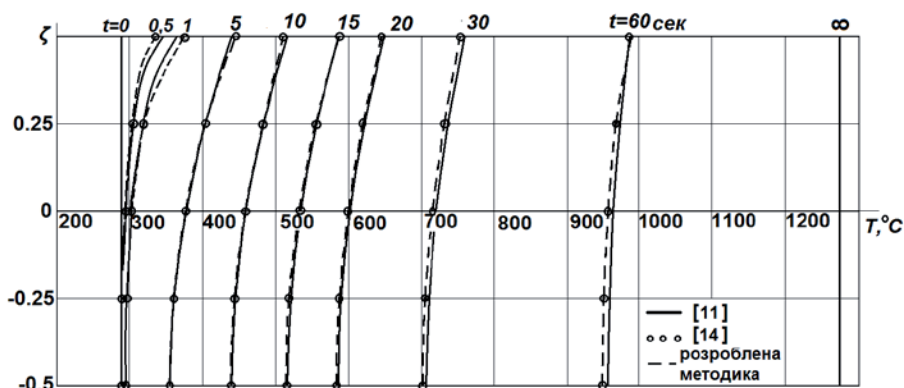


Рис. 5. Розподілення невстановленої температури в необмеженій пластині

Аналіз результатів показує, що в даному прикладі спостерігається добра збіжність наближених і аналітичного розв'язку.

## 6. Обговорення результатів дослідження просторових задач нестационарної теплопровідності

За основу вихідних співвідношень прийняті рівняння просторової задачі нестационарної теплопровідності в криволінійній системі координат в диференційній і варіаційній постановках. На основі представлення розподілення температур вздовж координати  $x^3$  поліномами Міхліна отримані формули для визначення елементів матриць теплопровідності і теплоємності на основі НМСЕ, що дозволило для розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь використати ефективний алгоритм блочних ітерацій з верхньою релаксацією і реалізувати ефективний алгоритм розв'язання системи диференційних рівнянь за часом. Отримані співвідношення НМСЕ і алгоритми реалізовані у вигляді проблемно-орієнтованої підсистеми для комп'ютерного моделювання нестационарних теплових процесів. Достовірність результатів обґрунтовано шляхом розв'язку тестових прикладів, що мають аналітичні та чисельні результати.

В перше в рамках НМСЕ розроблена методика розв'язку просторової нестационарної задачі теплопровідності для призматичних тіл, що дозволяє на відміну від використання рядів Фур'є моделювати довільні граничні умови на торцях скінченних елементів завдяки розкладу переміщень на основі поліномів Міхліна. Це дозволяє використовувати розроблену методикою при визначенні розрахункового ресурсу елементів енергетичних установок з урахуванням більш складного характеру їх поведінки в реальних режимах експлуатації.

## 7. Висновки

В результаті проведених досліджень:

1) прийнято в якості вихідних співвідношень рівняння просторової задачі нестационарної теплопровідності

в криволінійній системі координат в диференційній і варіаційній постановках;

2) розроблено ефективну методикою розв'язку просторової нестационарної задачі теплопровідності для призматичних тіл складної форми

поперечного перерізу на основі напіваналітичного методу скінченних елементів;

3) реалізовано розроблену методикою у вигляді проблемно-орієнтованої підсистеми для комп'ютерного моделювання нестационарних теплових процесів;

4) проведено апробацію розробленої методики шляхом розв'язання тестових прикладів, зокрема досліджено теплопровідність циліндричної стінки, призматичного стрижня та необмеженої сталевий пластини.

Враховуючи вище зазначене, на основі НМСЕ розроблена,

реалізована та апробована шляхом порівняння з наведеними в літературі результатами ефективна методика розв'язку просторової нестационарної задачі теплопровідності для призматичних тіл складної форми поперечного перерізу, яка дозволяє проводити чисельні дослідження зміни температурних полів в часі для широкого класу об'єктів.

## Література

- Zienkiewicz, O. C. The finite element method in engineering science [Text] / O. C. Zienkiewicz. — London: MCGRAW-HILL, 1971. — 541 p.
- Луканин, В. Н. Теплотехника [Текст]: учебн. / В. Н. Луканин, М. Г. Шатров, Г. М. Камфер. — М.: Высшая школа, 1999. — 671 с.
- Concrete Suite — Theory Manual. Version 12.1 [Text]. — Canonsburg, PA, USA, Inc., 2009. — 121 p.
- ABAQUS Theory Manual [Text]. — USA, Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 2000. — 841 p.
- MSC/NASTRAN Quick Start Guide. Version 70.5 [Text]. — Los Angeles: The MacNeal-Schwendler Corporation, 2000. — 211 p.
- Borhan, T. M. Prediction of the thermal conductivity of concrete using ABAQUS model [Text] / Tumadhir Merawi Borhan // Al-Qadisiya Journal For Engineering Sciences. — 2014. — Vol. 7, № 1. — P. 127–136.
- Piekarska, W. Application of ABAQUS to analysis of the temperature field in elements heated by moving heat sources [Text] / W. Piekarska, M. Kubiak, Z. Saternus // Archives of foundry engineering. — 2010. — Vol. 10, № 4. — P. 177–182.
- Lawrence, J. Finite element analysis of temperature distribution using ABAQUS for a laser-based tile grout sealing process [Text] / J. Lawrence, L. Li // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture. — 2000. — Vol. 214, № 6. — P. 451–461. doi:10.1243/0954405001517766
- Баженов, В. А. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел [Текст] / В. А. Баженов, А. И. Гуляр, А. С. Сахаров, А. Г. Топор. — К.: НИИСМ, 1993. — 376 с.
- Баженов, В. А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл [Текст] / В. А. Баженов, О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, О. С. Сахаров. — К.: Каравела, 2014. — 236 с.
- Коваленко, А. Д. Основы термоупругости [Текст] / А. Д. Коваленко. — К.: Наук. думка, 1970. — 204 с.
- Шабров, Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей [Текст] / Н. Н. Шабров. — Л.: Машиностроение, 1968. — 212 с.

13. Димніч, А. Х. Теплопровідність [Текст]: навч. посібник / А. Х. Димніч, О. А. Троянський. — Донецьк, 2003. — 370 с.
14. Гуляр, А. И. Решения трехмерной задачи теплопроводности в криволинейной системе координат методом конечных элементов [Текст] / А. И. Гуляр, В. Н. Кислюкий, А. С. Сахаров, С. М. Чорный // Сопротивление материалов и теория сооружений. — 1974. — Вып. XXII. — С. 23–34.

#### РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Приведены основные расчетные соотношения и алгоритм решения пространственных задач нестационарной теплопроводности для призматических тел сложной формы поперечного сечения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Разработанная методика реализована в виде проблемно-ориентированной подсистемы для компьютерного моделирования нестационарных тепловых процессов. Проведены многочисленные исследования достоверности получаемых результатов на основе разработанной методики путем решения тестовых примеров.

**Ключевые слова:** полуаналитический метод конечных элементов (ПМКЭ), нестационарная теплопроводность, криволинейная система координат.

*Гуляр Александр Иванович, доктор технических наук, профессор, пенсионер, кафедра строительной механики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина, e-mail: agulyar@ukr.net.*

*Пискунов Сергей Олегович, доктор технических наук, профессор, кафедра строительной механики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина, e-mail: s\_piskunov@ua.fm.*

*Андрієвський Віктор Петрович, кандидат технічних наук, доцент, кафедра будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна, e-mail: a-v-petrovich@ukr.net.*

*Шкріль Олексій Олександрович, кандидат технічних наук, доцент, кафедра будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна, e-mail: alexniism@ukr.net.*

*Гуляр Александр Иванович, доктор технических наук, профессор, пенсионер, кафедра строительной механики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина.*

*Пискунов Сергей Олегович, доктор технических наук, профессор, кафедра строительной механики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина.*

*Андрієвський Віктор Петрович, кандидат технічних наук, доцент, кафедра строительной механики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина.*

*Шкріль Алексей Александрович, кандидат технических наук, доцент, кафедра строительной механики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина.*

*Gulyar Aleksandr, Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine, e-mail: agulyar@ukr.net.*

*Pyskunov Sergey, Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine, e-mail: s\_piskunov@ua.fm.*

*Andrievskiy Viktor, Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine, e-mail: a-v-petrovich@ukr.net.*

*Shkril Alexey, Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine, e-mail: alexniism@ukr.net.*

УДК 515.518

DOI: 10.15587/2312-8372.2015.45120

Ганношина І. М.

## УПРАВЛІННЯ ФОРМОЮ NURBS-КРИВОЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗМІНИ ВАГІВ ВУЗЛОВИХ ТОЧОК

В статті пропонується методика управління формою NURBS-кривої методом зміни «вагів» точок вузлового вектору. При цьому пропонується застосувати допоміжні графіки впливу вузлових точок із заданою одиничною «вагою» на форму кривої, які наочно показують, як зміниться форма при зміні «ваги» вузлової точки.

**Ключові слова:** NURBS-крива, точковий репер, вага вузлової точки, допоміжний епюр графіків.

### 1. Вступ

В роботі проектувальників обводів машин, які працюють у рухомому середовищі, в теперішній час найбільшого застосування набув метод NURBS-технологій. При цьому часто виникає задача модифікації змодельованої кривої таким чином, щоб отримати іншу бажану результуючу форму. Але методів, які б давали передбачувану форму, не існує [1]. Тому є актуальним розробити такий метод, який пропонується в цій роботі.

В теперішній час проектування криволінійних обводів в машинобудуванні широко використовується метод NURBS-технологій. Але цей метод має такий недолік, як непередбачуваність кінцевого результату

проектування. Тому є актуальним розробка методів, які б забезпечували отримання бажаних наперед заданих результатів.

### 2. Аналіз літературних досліджень

В статтях [2–6] пропонується інтерактивні підходи до управління формою NURBS-кривої. При цьому застосовується розроблена програма побудови NURBS-кривої [7–12]. Пропонується методом послідовної зміни точок вузлового вектора і їх вагів оцінювати зміну кривої і покорово її змінювати до тих пір, поки не отримаємо бажаний результат. Такий підхід не дає змоги передбачити кінцевий результат не початку проектування.