

Л. І. Мочурад

ЗАПРОВАДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОЇ МЕТОДИКИ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ

Розглянуті деякі аспекти чисельного розв'язування граничних задач теорії потенціалу з абелевими групами симетрії скінченного порядку. Запропоновано ефективну методику, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь в поєднанні з апаратом теорії груп.

Ключові слова: інтегральні рівняння, теорія потенціалу, абелева група симетрії, метод колокації.

1. Вступ

Електронно-оптичні системи є основними компонентами сучасних дослідницьких комплексів, за допомогою яких вивчають складні фізичні процеси, пов'язані з рухом заряджених частинок у відповідних потенціальних полях. Наприклад, відомо, що електронні гармати є невід'ємними частинами ламп біжучої хвилі. Останні є важливими електровакуумними приладами, які широко використовують у радіолокації, радіоастрономії, вимірювальній техніці тощо. Такі електронно-оптичні системи як електростатичні лінзи використовуються в багатьох електронних приладах. Так, лінзи і їх системи є основними частинами сучасних потужних електронних мікроскопів та прискорювачів. Останні відіграють важливу роль в ядерній фізиці.

У процесі проектування електронно-оптичних систем постає проблема визначення електростатичного поля, створюваного сукупністю заряджених електродів складної конфігурації.

2. Постановка проблеми

Нехай електростатичне поле електронно-оптичної системи створюється N ідеально провідними електродами, які у своїй сукупності моделюють багатозв'язною поверхнею $S := \bigcup_{i=1}^N S_i$, де $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Кожен електрод $S_i \in S$ характеризують заданим потенціалом, який є постійною величиною. Розімкнені поверхні S_i віднесемо до класу ліпшицевих.

При математичному моделюванні проблеми в загальній постановці необхідно знайти функцію $U \in H^1(\Omega_s, \Delta)$, яка задовольняє умови

$$\Delta U = 0 \quad \text{в } \Omega_s := \mathbb{R}^3 / \bar{S}; \quad (1)$$

$$\delta^\pm U = f \quad \text{на } S; \quad (2)$$

$$\lim_{|Q| \rightarrow \infty} U(Q) = 0, \quad \text{точка } Q \in \Omega_s, \quad (3)$$

де $\delta^\pm: H^1(\Omega_s) \rightarrow H^{1/2}(S)$ — оператори сліду [1], $f \in H^{1/2}(S)$ — задане граничне значення потенціалу, а

$$H^1(\Omega_s, \Delta) := \left\{ U \mid U \in H^1(\Omega_s), \Delta U \in L_2(\Omega_s) \right\}.$$

3. Основна частина

3.1. Аналіз літературних джерел по темі дослідження. У роботі [2] проведений аналіз чисельного розв'язування задачі (1)–(3) на основі методу інтегральних рівнянь. Проте наявність великої кількості електродів в конструкції реальних приладів і високі вимоги до точності обчислень суттєво ускладнює традиційне використання методу інтегральних рівнянь, тому ефективним виявляється врахування наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь S_i . Останнє дає можливість трактувати проблему як задачу з абелевою групою симетрії скінченного порядку.

В роботі [3], не зменшуючи загальності, продемонстровано основні результати розв'язування однієї просторової задачі з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку. Описана в роботі методика дозволяє перейти від початкового інтегрального рівняння, заданого на всій граничній поверхні, до послідовності N незалежних інтегральних рівнянь, заданих лише на одній із її конгруентних складових, де N — порядок групи симетрії відповідної крайової задачі. Це дозволяє, по-перше, ефективніше використовувати оперативну пам'ять комп'ютера, зменшуючи її об'єм у N^2 разів при формуванні кожної системи лінійних алгебричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні. По-друге, створюються передумови до розпаралелення процесу розв'язування задачі в цілому.

Для врахування сингулярної поведінки шуканої густини розподілу зарядів в околі кутових точок

і при підході до контуру граничної поверхні можна використовувати апостеріорний метод оцінювання похибки, запроваджений в роботі [4]. Проте врахування специфіки розімкнених поверхонь, а саме, їх геометричної симетрії, дозволило значно зменшити кількість контрольованих особливих точок: в найкращому випадку мати справу лише з однією.

Для спрощення процедури розв'язування окремих просторових задач електростатики можна використати той факт, що для встановлення якісної картини поля в центральних поперечних перерізах електронно-оптичних систем можна обмежитись дослідженням лише плоских перерізів просторових конструкцій [5]. Чисельне розв'язування за такою схемою здійснюється також з використанням апарату теорії груп і дозволяє, в свою чергу, перевірити достовірність отримуваних результатів при розв'язуванні відповідних просторових задач.

3.2. Результати досліджень. При дослідженні математичної моделі, яка описує так зване плоске електростатичне поле, важливим є встановлення того факту [6], що наявна в поданні розв'язку адитивна стала C , яка відображає довільність граничних значень потенціалу на електродах, рівна середньому арифметичному цих значень. Отже, C в результаті знаходимо просто без додаткових складних обчислень, що суттєво спрощує алгоритм наближеного розв'язування відповідної плоскої задачі електростатики.

Очевидним є також створення передумов для розпаралелення процедури розв'язування початкової задачі. Для реалізації паралельних алгоритмів можна використовувати паралельні комп'ютери або таку властивість як багатопотоковість. Перший спосіб дає можливість, вибираючи різну кількість процесорів, досягати або максимальної ефективності їх завантаження, або ж збільшувати швидкість обчислень. Другий спосіб дозволяє, використовуючи сучасні архітектури багатоядерних процесорів, провести експериментальні дослідження застосування найбільш популярного засобу *OpenMP* для розпаралелення процедур чисельного розв'язування різних класів крайових задач теорії потенціалу з абелевими групами симетрій скінченних порядків.

Ефективність та достовірність запропонованої методики підтверджена низкою чисельних експериментів. Проведено наближене розв'язування ряду просторових задач з різними конфігураціями поверхонь-електродів та різними граничними значеннями потенціалів, в тому числі з використанням так званого плоского наближення. Також розглянуто абелеві групи симетрій різних порядків. Для наочного зображення електростатичного поля використано екіпотенціальні лінії, тобто розв'язки проаналізовано розподілом ліній рівного потенціалу, що дозволяє ефективним чином відслідкувати специфіку кожної окремої досліджуваної проблеми.

Література

1. Lions, J.-L. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications [Text] / J.-L. Lions, E. Magenes. — Dunod. Paris. — 1968. — Vol. 1.
2. Garasym, Ya. S. On numerical approach to solve some three-dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method [Text] / Ya. S. Garasym, **B. A. Ostudin** // J. Comput. Appl. Math. — 2003. — No1 (88). — Pp. 17–27.
3. Мочурад Л. І. Дослідження наближених розв'язків однієї граничної задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку [Текст] / Л. І. Мочурад, **Б. А. Остудін** // Праці міжнародного симпозиуму «Проблеми оптимізації обчислень», 24–29.09.09, смт. Кацивелі, Інститут кібернетики НАНУ ім. В. М. Глушкова НАНУ. — Київ. — 2009. — С. 117–122.
4. Mochurad L. I. Maximal Using of Specifics of Some Boundary Problems in Potential Theory After Their Numerical Analysis [Text] / L. Mochurad, Y. Harasym, **B. Ostudin** // International Journal of Computing. — 2009. — Volume 8, Issue 2. — С. 149–156.
5. Гарасим Я. Метод інтегральних рівнянь при числовому моделюванні граничних задач теорії потенціалу та можливості його ефективного використання [Текст] / Я. Гарасим, Л. Мочурад, **Б. Остудін** // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2008. — Вип. 14. — С. 64–74.
6. Mochurad L. I. Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information [Text] / L. I. Mochurad, B. A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2011. — № 2(105). — P. 98–110.

ВВЕДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ МЕТОДИКИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

Л. И. Мочурад

Рассмотрены некоторые аспекты численного решения граничных задач теории потенциала абелевых групп симметрии конечного порядка. Предложена эффективная методика, в основе которой лежит метод интегральных уравнений в сочетании с аппаратом теории групп.

Ключевые слова: интегральные уравнения, теория потенциала, абелева группа симметрии, метод коллокации.

Lesya Igorivna Mochurad, ассистент кафедры информационных систем и технологий Научно-учебного института предпринимательства и перспективных технологий национального университета «Львовская Политехника», тел.: (097) 868-30-14, e-mail: Lesiamo@mail.ru.

IMPLEMENT AN EFFECTIVE TECHNIQUE FOR NUMERICAL SOLUTION OF PROBLEMS OF ELECTRONIC OPTICS

L. Mochurad

Some aspects of the numerical solution of boundary value problems of potential theory with finite order Abelian groups of symmetry is considered. An effective method based on the method of integral equations in conjunction with the apparatus of group theory.

Keywords: integral equations, the potential theory, the Abelian group of symmetry, the collocation method.

Lesya Mochurad, Assistant Professor of Information Systems and Technology Research and Training Institute for Entrepreneurship and Advanced Technologies National University «Lviv Polytechnic», tel.: (097) 868-30-14, e-mail: Lesiamo@mail.ru.