УДК 681.04

**Ю. Д. Полисский**

# АЛГОРИТМЫ ВЫПОЛНЕНИЯ НЕМОДУЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ СРАВНЕНИЯ ЧИСЕЛ В МОДУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

*Рассмотрены подходы к выполнению немодульной операции сравнения чисел, представленных в системе остаточных классов.*

**Ключевые слова:** *остаточные классы, сложные операции, модули, сравнение.*

## Введение

Принципы параллельной обработки данных, основанные на использовании системы остаточных классов (СОК), находят все большее применение в построении высокопроизводительных вычислительных структур. Однако практическое использование остаточной арифметики наталкивается на определенные трудности при реализации немодульных, так называемых сложных, операций, для выполнения которых необходимо знание цифр операндов по всем разрядам. При этом операции сравнения чисел, представленные в табл. 1, являются базовыми, с помощью которых могут быть выполнены все остальные операции. В табл. 2 в качестве примера показана связь немодульной операции деления на 2 с операцией сравнения.

**Таблица 1**

| Операция | | | | Результ. |
|---|---|---|---|---|
| № | Сравнение чисел | Обозн. | Содержание | |
| 1 | Попарное | $\Im_1$ | $N_1 > N_2$, $N_1 < N_2$, $N_1 \geq N_1$, $N_1 \leq N_1$ | $\Re_1$ |
| 2 | Групповое | $\Im_2$ | $N_{\min} = \min\{N_i,\ i = 1,2,\ldots,k\}$ $N_{\max} = \max\{N_i,\ i = 1,2,\ldots,k\}$ | $\Re_2$ |

**Таблица 2**

| Наименование операции | Содержание операции |
|---|---|
| Деление на два | $N_r = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$, $\gamma_i = \left(\dfrac{\tilde{\alpha}_i}{2}\right)(\operatorname{mod} m_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ $N_{r1} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, 0, \ldots, \tilde{\alpha}_n)$, $N_{r2} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, 1, \ldots, \tilde{\alpha}_n)$ $\Re_1 = N_{r1} \Im_1 \dfrac{M}{2}$, $\Re_1 \in \begin{cases} 0 \leq N_{r1} \leq \dfrac{M}{2}, & N_r = N_{r1} \\ \dfrac{M}{2} \leq N_{r1} < M, & N_r = N_{r2} \end{cases}$ |

Поскольку на основе сравнения могут быть реализованы остальные немодульные операции, в статье рассмотрены оценки быстродействия известных методов сравнения чисел.

## Основная часть

Системой остаточных классов называется система счисления, в которой произвольное число $N$ представляется в виде набора наименьших неотрицательных остатков по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$, т. е. $N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Здесь $\alpha_i = N(\operatorname{mod} m_i)$. При этом, если все целые числа $N$ принадлежат диапазону $[0, M)$, объем которого равен $M = m_1 m_2 \ldots m_n$, а модули $m_i$ взаимно простые, то каждому набору $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ соответствует только одно число $N$ из этого диапазона.

Пусть системой оснований полиадического кода также является система $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Тогда число $N$ в полиадическом коде представляется следующим образом

$$N = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + \cdots + \\ + \pi_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1},$$

где $\pi_i$ — позиционная характеристика $i$-го разряда, $\pi_i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В настоящее время известны два подхода к сравнению чисел. По первому для каждого из сравниваемых чисел вычисляются позиционные характеристики, после чего осуществляется поразрядное сравнение этих характеристик традиционными методами сравнения. Второй подход, впервые предложенный в [1] и развитый в работе [2], основан на вычислении «внутренних» характеристик — приведенных остатков сравниваемых чисел. Блок-схема данного алгоритма представлена на рис. 1.

При сравнении по данному алгоритму пары ненулевых чисел $A \neq B$ (в противном случае решение тривиально) в том случае, если после итерации для $i = j$ результат сравнения не получен, итерация для $i = j-1$ состоит в следующем. Вычисляем

 ISSN 2226-3780

$$\widetilde{\alpha}_i = (\widetilde{\alpha}_i - \widetilde{\alpha}_j)(\operatorname{mod} m_i), \quad i = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1;$$

$$\tilde{\beta}_i = (\tilde{\beta}_i - \tilde{\beta}_j)(\operatorname{mod} m_i), \quad i = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1$$

$$\widetilde{A}^j = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_j); \quad \widetilde{B} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_j).$$

$$\Re_1 = \begin{cases} A > B,\ (\widetilde{A}_{J-1} = \widetilde{B}_{J-1}) \bigcap (\widetilde{\alpha}_J > \tilde{\beta}_J) \bigcup (\widetilde{A}_{J-1} \neq 0 \bigcap \widetilde{B}_{J-1} = 0) \\ A < B,\ (\widetilde{A}_{J-1} = \widetilde{B}_{J-1}) \bigcap (\widetilde{\alpha}_J < \tilde{\beta}_J) \bigcup (\widetilde{A}_{J-1} = 0 \bigcap \widetilde{B}_{J-1} \neq 0) \end{cases}$$

При $(\widetilde{A}_{j-1} \neq \widetilde{B}_{j-1}) \bigcap (\widetilde{A}_{j-1} \neq 0) \bigcap (\widetilde{B}_{j-1} \neq 0)$ принимаем для следующей итерации $A_{j-1} = \dfrac{\widetilde{A}_{j-1}}{m_j}$ и $\widetilde{B}_{j-1} = \dfrac{\widetilde{B}^j_{j-1}}{m_j}$ в качестве сравниваемых чисел.

Если сравнение не завершилось на итерации для $i = 1$, то после ее выполнения

$$\Re_1 = \begin{cases} A > B,\ \left(\left(\widetilde{A}^{1,n-1} = \widetilde{B}^{1,n-1}\right) \bigcap \left(\widetilde{\alpha}_1^{1,n-2} > \tilde{\beta}_1^{1,n-2}\right)\right) \bigcup \left(\left(\widetilde{A}^{1,n-1} \neq \widetilde{B}^{1,n-1}\right) \bigcap \left(\widetilde{\alpha}_1^{1,n-1} > \tilde{\beta}_1^{1,n-1}\right)\right); \\ A < B,\ \left(\left(\widetilde{A}^{1,n-1} = \widetilde{B}^{1,n-1}\right) \bigcap \left(\widetilde{\alpha}_1^{1,n-2} < \tilde{\beta}_1^{1,n-2}\right)\right) \bigcup \left(\left(\widetilde{A}^{1,n-1} \neq \widetilde{B}^{1,n-1}\right) \bigcap \left(\widetilde{\alpha}_1^{1,n-1} < \tilde{\beta}_1^{1,n-1}\right)\right). \end{cases}$$

Определим временные оценки каждого из подходов. По первому подходу для определения позиционных характеристик $n$-разрядных чисел требуется $T_1^1 = n-1$ итераций, поскольку $\pi_1 = \alpha_1$. Для $n = 6$ количество итераций $T_1^1 = 5$. Определение количества итераций при сравнении позиционных характеристик $n$-разрядных чисел выполним с помощью дерева возможных исходов, представленном на рис. 2.

При сравнении по первому подходу $p_1 = \dfrac{1 - m_i}{m_i}$. Для системы модулей $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_4 = 7$, $m_5 = 11$, $m_6 = 13$ количество итераций $T_2^1 = 1{,}085$. Округляем до ближайшего большего, т. е. $T_2^1 = 2$. Значит, при сравнении по первому подходу пары чисел в системе модулей $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_4 = 7$, $m_5 = 11$, $m_6 = 13$ количество итераций $T^1 = T_1^1 + T_2^1 = 7$.

Определение количества итераций при втором подходе также выполним с помощью дерева возможных исходов, приведенном на рис. 2. При этом

$$p_i = \frac{3}{M_i} \times \sum_{1}^{i} m_j,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

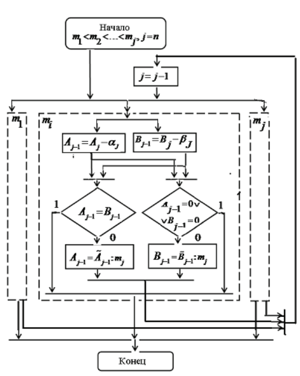


**Рис. 1.** Блок-схема алгоритма сравнения при втором подходе

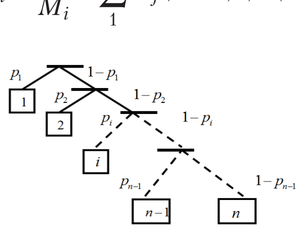

**Рис. 2.** Дерево возможных исходов ($p_i$ — вероятность события, которое заключается в том, что результат сравнения будет получен на $i$-й итерации)

и, следовательно, $T^2 = 3{,}682$. Округляем до ближайшего большего, т. е. $T^2 = 4$.

Таким образом, при втором подходе выигрыш в быстродействии составляет $\Theta = \dfrac{T^1}{T^2} = 1{,}75$.

## Заключение

1. Рассмотрены подходы к решению базовой операции — сравнению чисел.
2. Показано, что метод решения, базирующийся на «внутреннем» по отношению к системе счисления способе без предварительного преобразования непозиционного представления чисел в позиционное, имеет большее быстродействие.
3. Представляется целесообразным использовать данный метод в качестве направления исследований для получения эффективных решений задач выполнения немодульных операций.

### Литература

1. А. с. СССР № 608155 М. Кл2 G 06 F 7/04. Устройство для сравнения чисел, выраженных в системе остаточных классов [Текст] / М. Г. Факторович, Ю. Д. Полисский (СССР). — 1978.
2. Полисский Ю. Д. Некоторые вопросы выполнения сложных операций в системе остаточных классов [Текст] / Ю. Д. Полисский // Электронное моделирование. — 2008. —Т. 30. — № 2. — С. 115—120.

### АЛГОРИТМИ ВИКОНАННЯ НЕМОДУЛЬНИХ ОПЕРАЦІЙ ПОРІВНЯННЯ ЧИСЕЛ В МОДУЛЯРНІЙ СИСТЕМІ ЗАЛИШКОВИХ КЛАСІВ

**Ю. Д. Поліський**

Розглянуті підходи до виконання немодульної операції порівняння чисел, представлених в системі залишкових класів.

**Ключові слова:** залишкові класи, складні операції, модулі, порівняння.

***Юрій Давидович Поліський**, кандидат технічних наук, Науково-дослідницький інститут автоматизації чорної металургії, **тел.: (056) 7443365, e-mail: polissky@mail.ru**.*

### ALGORITHMS OF IMPLEMENTATION OF UNMODULE OPERATIONS OF COMPARISON OF NUMBERS IN MODULAR RESIDUE CLASS SYSTEM

**Y. Polisskiy**

Going is considered near implementation of unmodule operation of comparison of numbers, presented in the system of residue classes.

**Keywords:** residue classes, difficult operations, modules, comparison.

***Yuri Polisskiy**, candidate of engineerings sciences, Research institute of automation of ferrous metallurgy, **tel.: (056) 7443365, e-mail: polissky@mail.ru**.*