УДК 519.6

А. В. Коротич

НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є ФУНКЦІЇ F(X;Y) З ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЇ

Дана робота присвячена питанням побудови та якості квадратурних та кубатурних формул, у тому числі кубатурних формул для обчислення перетворення Фур'є.

Ключові слова: *інтерлінація функцій, сплайн-інтерлінація, коефіцієнти Фур'є функції двох змінних.*

Вступ

Введення нового апарату при дослідженні тих чи інших питань є завжди актуальним, оскільки дає шлях для розв'язку виникаючих задач. Завдяки операторам сплайн-інтерлінації можна будувати кубатурні формули обчислення двовимірного перетворення Фур'є, які вимагають на порядок меншої кількості значень неосцилюючого множника підінтегральної функції при заданій точності обчислення порівняно з класичними кубатурними формулами, що використовують для побудови оператори сплайн-інтерполяції. Також властивості операторів сплайн-інтерлінації дають змогу розглядати нові методи в дослідженні якості побудованих кубатурних формул.

1. Постановка проблеми

В даній роботі наводиться аналіз результатів обчислювального експерименту з обчислення інтегралів від швидкоосцилюючої функції методом запропонованим в працях [3, 4] на основі створеної автором програми в системі комп'ютерної математики програми Mathcad.

2. Основна частина

Інтерлінацією функції $f(x,y)$ на декількох лініях Γ_k, $k=1,\ldots,K$ будемо називати відновлення функції $f(x,y)$ за її слідами $\varphi_k(x,y)=f(x,y)$ на лініях Γ_k. Тобто розв'язати задачу інтерлінації за заданими слідами $\varphi_k(x,y)$ — це означає побудувати деяку функцію $T_K f(x,y)$ (будемо називати її інтерлінантом), яка має властивість $T_K f(x,y)=\varphi_k(x,y)$ на лініях Γ_k. Особлива увага приділена методу побудови квадратичного сплайна, який не використовує додаткової системи вузлів, крім вузлів інтерполяції. Розглянемо функцію

$$f(x)\in MC^2[a,b]=\Big\{f(x): f^{(s)}(x)\in C[-1,1],\ s=0,1,$$

$$f' \text{ — кусково-неперервна на } [-1,1],\ \|f''\|_{L_\infty[-1,1]}\le M\Big\}.$$

Нехай задана сітка $\Delta: -1=x_1<x_2\ldots<x_N=1$. Сплайн другого степеня має вигляд

$$S_2(x)=\frac{1}{h_i}\big[(x-x_i)y_{i+1}-(x-x_{i+1})y_i\big]+$$
$$+\frac{M_{i,i+1}}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1}), \tag{1}$$
$$x\in[x_i,x_{i+1}],\quad h_i=x_{i+1}-x_i,\ i=\overline{1,N-1},$$

де при рівномірному розбитті $h_1=h_2=\ldots=h_{n-1}=h==h=2/(n-1)$ для $M_{i,i+1}$, $i=\overline{1,n}$ виконуються рівності $M_{1,2}=0$, $n=2$,

$$M_{1,2}=\frac{2}{(n-1)h^2}\Bigg[(n-2)y_1-(3n-7)y_2+$$
$$+4\sum_{s=3}^{n-1}(-1)^{n-1}(n-s)y_s+(-1)^{n-1}y_n\Bigg],\quad n\ge 3;$$

$$M_{2,3}=\frac{2}{h^2}(y_1-2y_2+y_3)-M_{1,2},$$

$$M_{i,i+1}=\frac{2(-1)^i}{h^2}\left(y_1-3y_2+4\sum_{s=3}^{i-1}(-1)^{s-1}y_s+(-1)^{n-1}y_n\right)+$$
$$+(-1)^{i-1}M_{1,2},\ i=\overline{3,n-1}. \tag{2}$$

Запис квадратичних сплайнів у вигляді (1) зручний , але в деяких випадках така форма запису є менш привабливою ніж форма запису $S_2(x)=\sum_{k=1}^{n}S_{2k}(x)\cdot y_k$, де $S_{2k}(x)$, $k=\overline{1,n}$ — базисні квадратичні сплайни з властивостями $S_{2k}(x_p)=\delta_{k,p}$, $k,p=\overline{1,n}$.

Побудовані оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних

$$\begin{Bmatrix} I_1^2(m,n)\\ I_2^2(m,n)\\ I_3^2(m,n)\end{Bmatrix}=\int_a^b\!\!\int_a^b f(x,y)\begin{Bmatrix}\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\\ \cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\\ e^{-i2\pi nx}e^{-i2\pi ny}\end{Bmatrix}dxdy$$

з використанням сплайн інтерлінації функцій для деяких класів функцій.

Розглянемо клас функцій $C^2_{2,L,L}$ — клас функцій, що задовольняють умові Ліпшиця по кожній змінній:

$$\left|f(x_1,y)-f(x_{2,}y)\right|\le L|x_1-x_2|,$$

$$\left|f(x,y_1)-f(x_,y_2)\right|\le L|y_1-y_2|,$$

та значення $f_{kj}=f(x_k,y_j)$, $k=\overline{1,m_1}$, $j=\overline{1,m_2}$, задані не більше, ніж в $N=m_1m_2$ заданих вузлових точках $(x_k,y_j)\in G=[0,1]^2$. Нехай $m_1=m_2=\ell^2$, тоді $N=\ell^4$. Введемо позначення

$$X_i=[x_{k-1},x_i],\ Y_j=[y_{j-1},y_j],$$

$$\widetilde{X}_{\tilde k}=[\tilde x_{\tilde k-1},\tilde x_{\tilde k}],\ \widetilde{Y}_{\tilde j}=[\tilde y_{\tilde j-1},\tilde y_{\tilde j}],$$

$$h_{0k}(x)=\begin{cases}1,x\in X_k\\0,x\notin X_k,\end{cases}k=\overline{1,\ell};\ H_{0j}(y)=\begin{cases}1,y\in Y_j,\\0,y\notin Y_j,\end{cases}j=\overline{1,\ell},$$

$$\tilde h_{0\tilde k}(x)=\begin{cases}1,x\in \widetilde{X}_{\tilde k}\\0,x\notin \widetilde{X}_{\tilde k},\end{cases}\tilde k=\overline{1,\ell^2};\ \widetilde{H}_{0\tilde j}(y)=\begin{cases}1,y\in \widetilde{Y}_{\tilde j},\\0,y\notin \widetilde{Y}_{\tilde j},\end{cases}\tilde j=\overline{1,\ell^2},$$

$$x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\ k,j=\overline{1,\ell},$$

$$\tilde x_{\tilde k}=\tilde k\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde y_{\tilde j}=\tilde j\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},$$

$$\tilde k,\tilde j=\overline{1,\ell^2},\ \Delta=\frac{1}{\ell},\ \Delta_1=\frac{1}{\ell^2}.$$

Нехай $Jf(x,y)$ — оператор-інтерлінант

$$Jf(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell}f(x_k,y)h_{0k}(x)+\sum_{j=1}^{\ell}f(x,y_j)H_{0j}(y)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}f(x_k,y_j)h_{0k}(x)H_{0j}(y),\qquad(3)$$

а $\tilde Jf(x,y)$ — оператор-інтерполянт, побудований на основі інтерлінанта $Jf(x,y)$

$$\widetilde{J}f(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde j=1}^{\ell^2}f(x_k,\tilde y_{\tilde j})h_{0k}(x)\widetilde{H}_{0\tilde j}(y)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde k=1}^{\ell^2}f(\tilde x_{\tilde k},y_j)\tilde h_{0\tilde k}(x)H_{0j}(y)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}f(x_k,y_j)h_{0k}(x)H_{0j}(y),$$

для якого виконуються властивості

$$\left|f(x,y)-\widetilde{J}f(x,y)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^2}\right)=O(\Delta^2),\quad\forall(x,y)\in G.$$

Для обчислення, наприклад, інтегралу $I_1^2(m,n)$ пропонуються формула:

$$\Phi_1^2=\int_0^1\int_0^1\widetilde{J}f(x,y)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny dxdy.$$

2.1. Аналіз літературних джерел по темі дослідження. В роботі [1] розглянутий метод побудови квадратичного сплайна, який не використовує додаткової системи вузлів, крім вузлів інтерполяції, не потребує використання яких-небудь граничних умов, дає явне представлення цих сплайнів (не вимагає розв'язання системи лінійних рівнянь).

В основу програмного забезпечення покладено результати досліджень доктора ф.-м. н., проф. Литвина О. М. та аспірантки Нечуйвітер О. П. В яких побудова оптимальних за порядком точності кубатурних формул обчислення перетворення Фур'є функції двох змінних із застосуванням сплайн-інтерлінації функцій, які використовують на порядок менше значень неосцилюючого множника підінтегральної функції ніж відомі при заданій точності.

2.2. Результати досліджень. Проведений обчислювальний експеримент підтверджує теоретичні висновки роботи. Крім того, запропоновані кубатурні формули є такими, що дозволяють оцінювати похибку наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних через оцінку похибки відповідних квадратурних формул.

Література

1. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування [Текст] / **О. М. Литвин**. — Харків : Основа, 2002. —544 с.
2. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи [Текст] / **О. М. Литвин**. — Київ : Наукова думка, 2005. — 332 с.
3. Литвин О. М. Застосування інтерлінації функцій та швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є [Текст] / **О. М. Литвин**, О. П. Нечуйвітер // Матеріали XVIII науково-методичної конференції. — Харків, УІПА. — 1995. — С. 229—231.
4. Литвин О. М. Застосування швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних [Текст] / **О. М. Литвин**, О. П. Нечуйвітер // Тез. доп. на Всеукр. науковій конференції «Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях», 5—7 жовтня 1995 р. — Львів. — С. 114—115.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦІЇ F(X;Y) С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙН-ИНТЕРЛИНАЦИИ ФУНКЦИИ

А. В. Коротич

Данная работа посвящена вопросам построения и качества квадратурных и кубатурних формул, в том числе кубатурних формул для вычисления превращения Фурье.

Ключевые слова: интерлинация функций, сплайн-интерлинация, коэффициенты Фурье функции двух переменных.

***Алина Викторовна Коротич**, магистрант кафедры математики Бердянского государственного педагогического университета, **тел.: (099) 438-82-56, e-mail: alina.korotich89@mail.ru**.*

CLOSE CALCULATION OF COEFFICIENTS OF FOURIER THE FUNCTION OF F(X;Y) WITH THE USE A SPLINE IS INTERLINACII FUNCTIONS

A. Korotich

This work is devoted the questions of construction and quality of quadrature and kubaturnikh formulas, including kubaturnikh formulas for the calculation of transformation of Fourier.

Keywords: interlinaciya functions, spline-interlinaciya, coefficients of Fourier a function two variables.

***Alina Korotich**, magistrant of department mathematical Berdyanskiy state pedagogical university, **tel.: (099) 438-82-56, e-mail: alina.korotich89@mail.ru**.*