



Коцур М. П.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНОГО ОХОЛОДЖЕННЯ

У статті запропоновано математичну модель процесу нестационарного термоелектричного охолодження. Враховано основні фактори, які впливають на процес. Сформульовано задачу оптимального керування нестационарним термоелектричним охолоджувачем з довільним числом каскадів. Запропоновано метод її вирішення. Наведено приклади комп'ютерного моделювання оптимальних функцій керування процесом нестационарного охолодження.

Ключові слова: нестационарне термоелектричне охолодження, математичне моделювання, оптимальне керування, об'єкт з розподіленими параметрами.

1. Вступ

Термоелектричний спосіб охолодження має широку сферу застосувань. Детальні теоретичні та експериментальні дослідження і оптимізація процесу термоелектричного охолодження проведені в основному для стаціонарного режиму роботи охолоджувачів (модулів) [1]. Результати цих досліджень сприяли масовому промисловому виробництву термоелектричних модулів для різноманітних потреб. Мініатюрні модулі ефективно використовуються для охолодження електронних та оптоелектронних пристроїв, мікросхем та мікропроцесорів. З використанням термоелектричних модулів створюються економічні теплові насоси, кондиціонери, термостати, медична апаратура, прилади космічного та військового призначення, охолоджувальні камери, вітрини, побутові малогабаритні холодильники та багато інших пристроїв.

Процес нестационарного термоелектричного охолодження (ПНТО) вивчений на сьогодні не достатньо. Водночас саме в нестационарних режимах може мати місце більш глибоке охолодження, ніж в стаціонарних [2]. Це можливо за умов оптимізації таких режимів. Задачі оптимізації ПНТО відносяться до задач оптимального керування об'єктами з розподіленими параметрами [3]. Застосування математичного моделювання та комп'ютерних методів є раціональним способом розв'язування таких задач і визначення оптимальних функцій керування такими об'єктами.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Факт більш глибокого термоелектричного охолодження в нестационарному режимі в порівнянні зі стаціонарним був встановлений вперше в теоретичній роботі Стільбанса і Федоровича [4] та підтверджений подальшими теоретичними [5–10] і експериментальними [7, 8, 11, 12] дослідженнями. З фізичної точки зору цей факт пояснюється тим, що ефект охолодження Пельтьє виникає на спаї, а тепло Джоуля в об'ємі віток

термоелемента. Отже за умов подачі струму охолодження спаю починається ще до того моменту, як тепло Джоуля досягне спаю. У цьому випадку застосування нетривалого імпульсу струму величиною більшою за максимальний струм стаціонарного режиму може забезпечити на деякий час нижчу температуру охолодження ніж в стаціонарному режимі.

Переважаюча більшість теоретичних досліджень ПНТО проводились для спрощених фізичних моделей термоелемента, використовуючи як наслідок наближені математичні моделі, які описують його роботу [6–10, 13–17]. Як правило, термоелемент моделюється одною термоелектричною віткою, виконаною із матеріалу з незалежними від температури термоелектричними параметрами [6–10, 13, 14]. Математична модель, яка описує поведінку розподілу температури в такому термоелементі, зводиться до одновимірного нестационарного рівняння теплопровідності із сталими коефіцієнтами, яке записується у вигляді:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + j^2(t) \rho,$$

де c , κ , ρ — об'ємна теплоємність, теплопровідність і питомий опір матеріалу термоелементу, а член $j^2(t) \rho$ враховує виділення тепла Джоуля за умов пропускання струму густиною j . Для знаходження розподілу температури задаються спрощені граничні умови, які не враховують ряд важливих фізичних процесів, що відбуваються на спаєх термоелемента. Наприклад, в [9, 13] розглядається модель термоелемента з напівнескінченими вітками, в якій вплив гарячого спаю на поведінку охолодження нехтується. На холодному спаї враховується поглинання тепла Пельтьє, але як правило, не враховуються виділення тепла Джоуля внаслідок наявності опору контактної шари в області спаю, тепловиділення і теплоємність об'єкта охолодження, теплоємність ізоляційної пластини та інші важливі фактори [7, 9, 14].

Використання наближених математичних моделей ПНТО дає змогу отримати результат, зокрема залежність

температури охолодження від часу, в аналітичній формі, як для випадку постійного струму [13], так і для окремих функцій, які задають залежність струму від часу, наприклад, для прямокутних або синусоїдальних імпульсів струму [16]. Але для розв'язування задач, пов'язаних з оптимізацією нестационарного процесу охолодження, навіть у випадку найпростіших математичних моделей, які описують процес, вже доводиться використовувати комп'ютерні методи [18–23].

Водночас, застосування наближених математичних моделей часто призводить до некоректних результатів. Наприклад, в роботах [7, 9] аналіз процесу нестационарного охолодження в термоелементі, який описується найпростішою моделлю напівнескінченної вітки, на холодному спаї якої враховується лише поглинання тепла Пельтьє, приводить до помилкового з фізичної точки зору висновку. Висновок полягає в тому, що на холодному спаї в принципі можна досягти як завгодно глибокого рівня охолодження за довільний проміжок часу.

Отже для дослідження процесу нестационарного термоелектричного охолодження та розробки методів оптимального керування цим процесом необхідно застосовувати достатньо складні математичні моделі, які б враховували основні фізичні явища такого процесу. Очевидно, що такі задачі можуть бути розв'язані тільки комп'ютерними методами.

3. Об'єкт, ціль та задачі дослідження

Об'єктом дослідження є процес нестационарного термоелектричного охолодження.

Мета дослідження полягала в побудові математичної моделі ПНТО та розробці методів оптимізації процесу нестационарного охолодження для комп'ютерного моделювання оптимальних функцій керування цим процесом.

Для досягнення поставленої мети вирішувалися наступні задачі:

1. Розробити математичну модель ПНТО, яка враховує більшість фізичних факторів, що впливають на процес.

2. Сформулювати задачу оптимального керування ПНТО та запропонувати методи для її розв'язання.

3. Провести комп'ютерне моделювання оптимальних функцій керування процесом нестационарного охолодження.

4. Оптимізація нестационарного процесу термоелектричного охолодження

4.1. Математична модель ПНТО. Огляд та аналіз наукових праць, які стосуються теоретичного опису нестационарного термоелектричного охолодження [5–10, 13–23], приводять до висновку, що математична модель ПНТО повинна враховувати наступні важливі фізичні фактори:

1. Термоелемент складається з двох віток n - і p -типу провідності, які виконані з однорідних матеріалів з різними та залежними від температури термоелектричними властивостями, а саме коефіцієнти термоЕРС $\alpha_{n,p}(T)$, електропровідності $\sigma_{n,p}(T)$ та теплопровідності $\kappa_{n,p}(T)$ є функціями температури.

2. За умов температурної залежності коефіцієнтів термоЕРС $\alpha_{n,p}(T)$ в термоелементі має місце термоелектричний ефект Томсона, який полягає у поглинанні (або

виділенні) в об'ємі віток тепла, потужність Q_T якого пропорційна струму і градієнту температури:

$$Q_T = \tau I \frac{\partial T}{\partial x},$$

де τ – коефіцієнт Томсона, пов'язаний з коефіцієнтом термоЕРС співвідношенням Томсона $\tau = T \frac{\partial \alpha}{\partial T}$.

3. У загальному випадку процес охолодження відбувається в модулі з довільним числом каскадів, в якому всі термоелементи з'єднані електрично-последовно.

4. По відношенню до теплового потоку каскади розміщуються последовно, а термоелементи в каскадах – паралельно.

5. Важливим є врахування тепловиділення Джоуля на контактних опорах [10], які мають місце в зоні контакту віток з комутаційними пластинами на холодному і гарячому спаях віток термоелемента.

6. На процес охолодження суттєво впливають теплоємність та тепловиділення об'єкту, що охолоджується, теплообмін холодної поверхні модуля з оточуючим середовищем.

Водночас для моделювання ПНТО будуть раціональними наступні наближення:

1. Температури холодних спайв, а також температури гарячих спайв всіх термоелектричних віток в кожному з каскадів однакові. Бокові поверхні віток адіабатично ізолювані. Теплове навантаження рівномірно розподіляється на холодні спаї всіх термоелементів в кожному каскаді. За цих умов тепловий потік направлений вздовж висоти віток, поперечними перепадами температури можна знехтувати, і розподіл температури у вітках вважати одновимірним $T_{n,p}(t,x)$.

2. Ізоляційні міжкаскадні пластини і об'єкт охолодження можна вважати об'єктами із зосередженою теплоємністю, температура яких залежить від часу і не залежить від координат.

3. Теплообмін холодної поверхні модуля з оточуючим середовищем постійної температури відбувається за законом Ньютона.

4. Температура гарячої поверхні модуля вважається фіксованою.

Враховуючи описану вище специфіку фізичних процесів, що відбуваються в термоелектричному модулі, моделювання нестационарного процесу охолодження необхідно будувати на системі одновимірних рівнянь нестационарної теплопровідності у вітках термоелементів n - і p -типу провідності для K -каскадного пристрою, яка має вигляд:

$$\frac{\partial T_{n,p}^{(k)}}{\partial t} = \frac{1}{c_{n,p}} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa_{n,p} \frac{\partial T_{n,p}^{(k)}}{\partial x_k} \right) + \rho_{n,p} \frac{I(t)^2}{s_{n,p}^2} - \left[-T_{n,p}^{(k)} \frac{I(t)}{s_{n,p}} \frac{\partial \alpha_{n,p}}{\partial T} \frac{\partial T_{n,p}^{(k)}}{\partial x_k} \right] \right], \quad k=1, \dots, K, \quad (1)$$

де $T_{n,p}^{(k)}$ – температура у вітках n - і p -типу k -ого каскаду. Висота віток однакова і дорівнює L , площа їх перерізу – різна і дорівнює s_n і s_p відповідно, $c_{n,p}$ – теплоємність

матеріалів віток. Час t змінюється на проміжку $t \in [0, \theta]$, а координата x_k в кожному каскаді направлена вздовж вітки від холодного спаю до гарячого і змінюється на відріжку $x_k \in [0, L]$. $I(t)$ — струм, що протікає у з'єднаних послідовно вітках термоелементів, який в загальному випадку є функцією часу.

У цих рівняннях перший доданок в правій частині враховує теплопровідність у вітках термоелементів, другий — виділення тепла Джоуля, третій — тепло Томсона.

Початкові умови для задачі знаходження розподілу температури $T_{n,p}^{(k)}(t, x)$ у вітках термоелементів за умови заданої функції струму $I(t)$ наступні:

$$T_{n,p}^{(k)}(x, 0) = T_a. \tag{2}$$

Крайові умови повинні враховувати тепловий баланс на холодній поверхні та між каскадами охолоджувача, неперервність температури між кінцями віток термоелементів та між каскадами і умову стабілізації температури основи охолоджувача. Ці умови записуються наступним чином:

— умови рівності температур між кінцями n - і p -віток:

$$T_p^{(k)}(0, t) = T_n^{(k)}(0, t); T_p^{(k)}(L, t) = T_n^{(k)}(L, t), k = 1, \dots, K, \tag{3}$$

— умови рівності температур між каскадами:

$$T_n^{(k+1)}(0, t) = T_n^{(k)}(L, t), k = 1, \dots, K-1, \tag{4}$$

— умова термостабілізації основи охолоджувача:

$$T_n^{(K)}(L, t) = T_a, \tag{5}$$

— умова теплового балансу для холодної поверхні першого каскаду, на якій знаходяться охолоджувальний об'єкт та ізоляційна пластина, сумарна об'ємна теплоємність яких g_1 :

$$g_1 \frac{\partial T_n^{(1)}(0, t)}{\partial t} = n_1 \left[q_0 + K_H (s_n + s_p) (T_a - T_n^{(1)}) - (\alpha_n + \alpha_p) I(t) T_n^{(1)} + I(t)^2 \left(\frac{r_0}{s_n} + \frac{r_0}{s_p} \right) + \kappa_n s_n \frac{\partial T_n^{(1)}}{\partial x_1} + \kappa_p s_p \frac{\partial T_p^{(1)}}{\partial x_1} \right]_{x_1=0}, \tag{6}$$

де перший член в правій частині враховує тепловиділення q_0 охолоджувального об'єкта, другий — теплообмін поверхні з оточуючим середовищем, температура якого T_a , K_H — коефіцієнт теплообміну, третій — тепло Пельтьє, четвертий — виділення тепла Джоуля внаслідок опору контакту, величина якого r_0 , n_1 — кількість термоелементів у першому каскаді;

— умови теплового балансу між каскадами:

$$g_{k+1} \frac{\partial T_n^{(k+1)}(0, t)}{\partial t} = n_k \left[(\alpha_n + \alpha_p) I T_n^{(k)} - \kappa_n s_n \frac{\partial T_n^{(k)}}{\partial x_k} - \kappa_p s_p \frac{\partial T_p^{(k)}}{\partial x_k} + I^2 \left(\frac{r_0}{s_n} + \frac{r_0}{s_p} \right) \right]_{x_k=L} - n_{k+1} \left[(\alpha_n + \alpha_p) I T_n^{(k+1)} - \kappa_n s_n \frac{\partial T_n^{(k+1)}}{\partial x_{k+1}} - \kappa_p s_p \frac{\partial T_p^{(k+1)}}{\partial x_{k+1}} - I^2 \left(\frac{r_0}{s_n} + \frac{r_0}{s_p} \right) \right]_{x_{k+1}=0}, \tag{7}$$

де $k = 1, \dots, K-1$, n_k — кількість термоелементів в каскадах, g_k — об'ємна теплоємність міжкаскадних ізоляційних пластин.

У рівняннях (1), (6), (7) характеристики матеріалів, а саме коефіцієнти $\alpha_{n,p}(T)$, $\rho_{n,p}(T)$, $\kappa_{n,p}(T)$ є функціями температури. Для комп'ютерного моделювання використовуються їх експериментальні залежності від T , апроксимовані поліномами.

4.2. Задача оптимального керування та спосіб її вирішення. Струмом I , що протікає у вітках термоелементів і забезпечує охолодження, можна керувати, якщо змінювати його величину з часом в межах $I \in G_I$, $G_I = \{0, I_{\max}\}$. Одна з раціональних оптимізаційних задач полягає у визначенні оптимальної функції струму $I(t)$ такої, що мінімізує температуру охолодження $T_n^{(1)}(0, \theta)$ каскадного пристрою за певний проміжок часу θ . Така задача відноситься до задач оптимізації об'єктів з розподіленими параметрами [3].

Ефективним шляхом для розв'язування задачі оптимізації об'єкта з розподіленими параметрами є його дискретизація і отримання таким чином об'єкта із зосередженими параметрами, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь. Це дозволяє використати для оптимізації принцип максимуму Понтрягіна.

Перехід в рівняннях (1)–(7) до безрозмірної координати, $x = x_k/L$, $x \in (0, 1)$ та їх дискретизація по x дозволяють записати рівняння (1), (6), (7) як систему звичайних диференціальних рівнянь наступним чином.

Позначимо невідомі температури $T_{n,p}^{(k)}(x)$ через $T_{k,m,i}$, де індекси означають: $k = 1, \dots, K$ — номер каскаду; $m = 1, 2$ — номер вітки ($m = 1$ — n -вітка, $m = 2$ — p -вітка); $i = 1, \dots, N+1$ — номер вузла вздовж координати ($N = 1/h$, h — крок вздовж координати). Тоді дискретизовані рівняння (1)–(7) запишуться у вигляді системи:

$$\frac{dT_{k,1,1}}{dt} = F_k, k = 1, \dots, K, \tag{8}$$

$$\frac{dT_{k,m,i}}{dt} = f_{k,m,i}, k = 1, \dots, K; m = 1, 2; i = 2, \dots, N,$$

з початковими умовами:

$$T_{k,m,i}(0) = T_a, k = 1, \dots, K; m = 1, 2; i = 1, \dots, N+1, \tag{9}$$

та додатковими умовами (3)–(5) на границях, які набувають вигляду:

$$\begin{aligned} T_{k,2,1}(t) &= T_{k,1,1}(t); T_{k,2,N+1}(t) = T_{k,1,N+1}(t), k=1, \dots, K, \\ T_{k,1,N+1}(t) &= T_{k+1,1,1}(t), k=1, \dots, K-1, \\ T_{K,1,N+1}(t) &= T_a, \end{aligned} \quad (10)$$

f_{k,m_i} та F_k – дискретизовані праві частини рівнянь (1), (6), (7).

Задача полягає у визначенні оптимальної функції керування $I(t)$, яка забезпечує мінімум функціоналу Φ :

$$\Phi = T_{1,1,1}(\theta). \quad (11)$$

Розв'язок такої оптимізаційної задачі визначається принципом максимуму Понтрягіна [24]. Для кожного моменту часу t повинна задовольнятися умова максимуму:

$$H(T(t), I(t), \psi(t)) = \max_{I \in G_I} H(T(t), I, \psi(t)), \quad (12)$$

де функція Гамільтона H має вигляд:

$$H = \sum_{k=1}^K \left(\Psi_k F_k + \sum_{m=1}^2 \sum_{i=2}^N \Psi_{k,m,i} f_{k,m,i} \right). \quad (13)$$

Допоміжні (спряжені до T) функції $\Psi_k(t)$ і $\Psi_{k,m,i}(t)$ повинні задовольняти дискретизовану спряжену до (8) систему диференціальних рівнянь з відповідними умовами трансверсальності [24].

Задача розв'язувалась чисельним методом за допомогою ітераційного алгоритму, який було реалізовано в середовищі Matlab. Для розв'язування основної системи рівнянь (8)–(10) для знаходження температур і спряженої до неї системи для визначення функцій $\Psi_k(t)$ і $\Psi_{k,m,i}(t)$ використовувався метод скінчених різниць.

5. Результати комп'ютерного моделювання та їх обговорення

Оцінки характеристик нестационарного процесу термоелектричного охолодження проводилися на прикладах одно- і двокаскадного модулів, вітки термоелементів яких виконані з напівпровідникових матеріалів на основі Ві-Те n - і p -типу провідності. Типові експериментальні температурні залежності термоелектричних параметрів $\alpha_{n,p}(T)$, $\rho_{n,p}(T)$, $\kappa_{n,p}(T)$ цих матеріалів [1] апроксимувалися поліномами і використовувалися для розрахунків. Теплоємність матеріалів n - і p -типу вважалась однаковою та дорівнювала $c = 1,4$ Дж/см³. Оцінки проводилися для термоелементів з висотою віток $L = 0,14$ см, площею перерізу $s_{n,p} = 0,1 \times 0,1$ см², величиною контактної опору $r_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ Ом·см². Враховувався теплообмін теплопоглинальної поверхні модулів з навколишнім середовищем, температура якого $T_a = 300$ К, коефіцієнт теплообміну $K_H = 10^{-3}$ Вт/см²К. Розглядалася робота модулів в режимі без теплового навантаження, тобто значення тепловиділення охолоджувального об'єкта

приймалося рівним $q_0 = 0$ Вт. Також для однокаскадного модуля досліджувався вплив навантаження q_0 на температуру охолодження. Теплоємність ізоляційних пластин в розрахунку на один термоелемент дорівнювала $g_k/n_k = 0,0012$ Дж/К, коефіцієнт каскадування для 2-каскадного модуля $n_1/n_2 = 1/2$.

Приклади результатів розрахунку оптимальних функцій струму живлення для одно- і двокаскадного модулів наведені на рис. 1, 2 відповідно. Тут показані розраховані оптимальні залежності струму від безрозмірного параметру часу $I(t/\theta)$, що мінімізують температуру охолодження модулів T_c в різні кінцеві моменти часу θ . На рис. 1, 2 показано, як знижується температура охолодження T_c в залежності від часу за умов використання цих оптимальних залежностей струму.

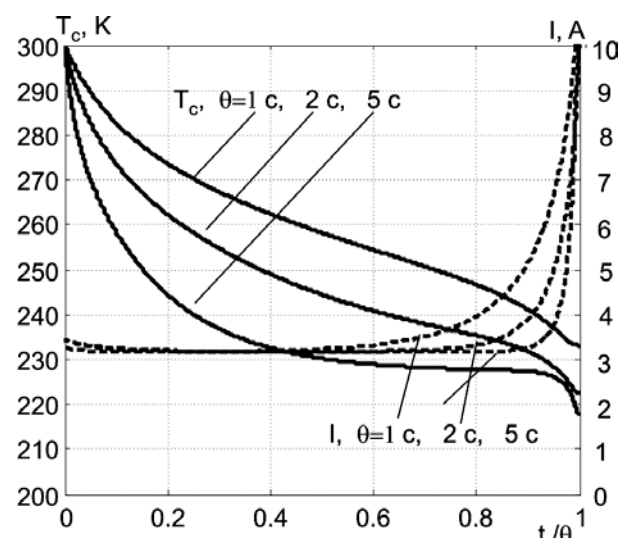


Рис. 1. Оптимальні залежності струму I та температури охолодження T_c однокаскадного модуля від безрозмірного параметру часу t/θ для різних кінцевих моментів часу θ

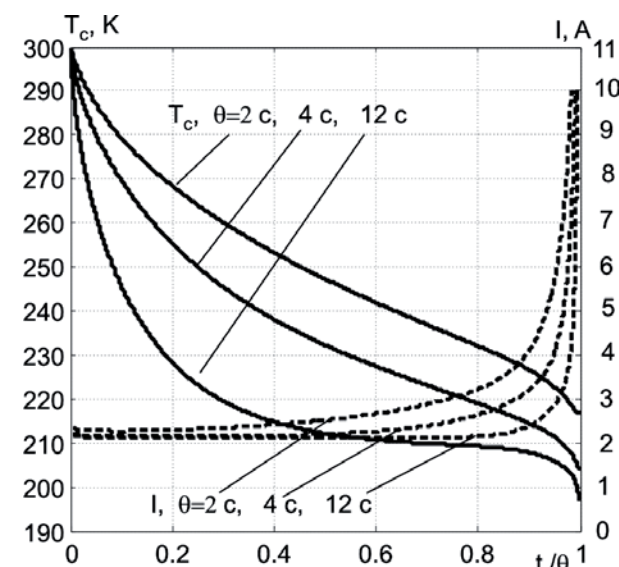


Рис. 2. Оптимальні залежності струму I та температури охолодження T_c двокаскадного модуля від безрозмірного параметру часу t/θ для різних кінцевих моментів часу θ

Температура, яка досягається за час $\theta = 5$ с на однокаскадному модулі, дорівнює $T_c = 218$ К. Отже

максимальний перепад температури на модулі в нестационарному режимі становить $\Delta T_{\max} = 82 \text{ K}$ і перевищує на 10–12 K ΔT_{\max} стандартних однокаскадних модулів в стаціонарному режимі [1].

Для двокаскадного модуля досягається $T_c = 197 \text{ K}$ за $\theta = 12 \text{ с}$, яка за оцінками на 10 K нижча за мінімальну температуру цього модуля в стаціонарному режимі.

Результати дослідження впливу теплового навантаження на температуру охолодження однокаскадного модуля наведені на рис. 3. Тут показані залежності температури охолодження T_c від часу для різних значень тепловиділення охолоджуваного об'єкта q_0 , що припадає на один термоелемент. Як показали розрахунки, оптимальна функція струму від часу $I_{opt}(t)$, яка забезпечує ці залежності, а отже мінімальну температуру охолодження за 5 с, є однаковою для різних значень q_0 . Тобто оптимальне керування не залежить від теплового навантаження термоелемента.

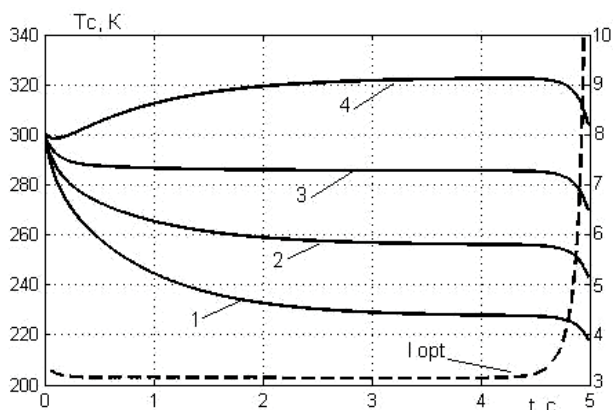


Рис. 3. Оптимальні залежності температури охолодження T_c від часу для різних значень теплового навантаження термоелемента q_0 та оптимальна функція струму $I_{opt}(t)$: 1 — $q_0 = 0 \text{ Вт}$; 2 — $q_0 = 0,1 \text{ Вт}$; 3 — $q_0 = 0,2 \text{ Вт}$; 4 — $q_0 = 0,3 \text{ Вт}$

У табл. 1 показана залежність перепаду температур на термоелементі від теплового навантаження q_0 . Значення q_0 , за якого $\Delta T = 0$, відповідає максимальній холодопродуктивності термоелемента в нестационарному режимі, яка досягається за допомогою оптимальної функції керування струмом $I_{opt}(t)$ (рис. 3). За оцінками максимальна холодопродуктивність термоелемента в нестационарному режимі на 20 % вища ніж в стаціонарному.

Таблиця 1

Залежність перепаду температур ΔT на термоелементі від теплового навантаження q_0 в нестационарному режимі

$q_0, \text{ Вт}$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,306
$\Delta T, \text{ К}$	82,0	69,4	56,6	43,5	30,1	16,2	2,0	0

На рис. 4 показано, які мінімальні температури охолодження можна досягти за різні проміжки часу за умови використання оптимальних функцій струму живлення одно- і двокаскадного модулів. Ці ж дані демонструють, за який мінімальний проміжок часу досягається задана температура охолодження.

Отже, отримані результати оптимізації нестационарного процесу термоелектричного охолодження показали, що використання оптимальних функцій струму $I(t)$

дозволяє досягнути суттєво нижчих температур ніж за умов застосування постійного струму.

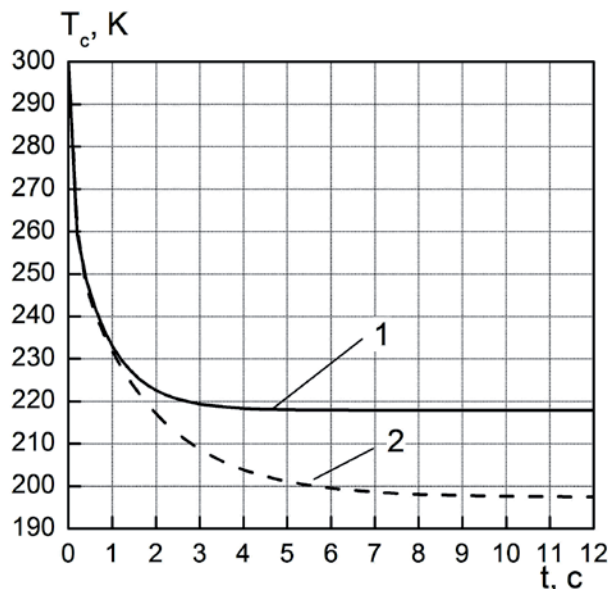


Рис. 4. Мінімальна температура T_c нестационарного охолодження, що досягається за різні проміжки часу t однокаскадним (1) і двокаскадним (2) охолоджувачами за умов використання оптимальних функцій струму живлення

Слід зауважити, що оптимальні функції $I(t)$ будуть різними для різних конструкцій термоелектричного охолоджувача. Розроблений метод комп'ютерного моделювання дозволяє легко їх визначати. Знання оптимальних залежностей $I(t)$ має важливе практичне значення. Ці функції використовуються для конструювання і автокалібровки ПІ та ПІД регуляторів, які необхідні для забезпечення роботи систем автоматичного регулювання процесу нестационарного охолодження в термоелектричних пристроях.

В подальшому запропоновані математична модель і метод її дискретизації можуть бути використані для розв'язування інших задач оптимального керування нестационарними процесами термоелектричного перетворення енергії, наприклад, для визначення оптимальних залежностей $I(t)$, які забезпечують необхідну зміну температури об'єкта, що охолоджується або нагрівається з мінімальними затратами електроенергії.

6. Висновки

У результаті проведених досліджень:

1. Розроблена узагальнена математична модель процесу нестационарного охолодження для термоелектричних модулів з довільним числом каскадів, яка враховує основні фізичні фактори, які суттєво впливають на процес, зокрема враховано ефект Томсона, виділення тепла Джоуля на контактних опорах, теплоємності охолоджуваного об'єкту та міжкаскадних ізоляційних пластин та ін.

2. Сформульована одна з основних задач оптимального керування ПНТО, яка полягає у визначенні оптимальної залежності струму живлення від часу, що забезпечує мінімальну температуру охолодження. Для вирішення цієї задачі запропоновано метод дискретизації

математичної моделі ПНТО за координатою, що дозволяє застосувати принцип максимуму Понтрягіна для розрахунку оптимальних функцій керування.

3. Розроблена методика комп'ютерного моделювання, яка застосована для визначення оптимальних функцій керування струмом $I(t)$ для одно- і двокаскадних термоелектричних модулів, які забезпечують на 10–12 К нижчі температури охолодження ніж за умов застосування постійного струму.

Література

1. Вайнер, А. А. Термоэлектрические охладители [Текст] / под ред. А. А. Вайнера. — М.: Радио и связь, 1983. — 176 с.
2. Каганов, М. А. Термоэлектрические тепловые насосы [Текст] / М. А. Каганов, М. Р. Привин. — Л.: Энергия, 1970. — 174 с.
3. Ahmed, N. U. Distributed Parameter Systems [Text] / N. U. Ahmed // Encyclopedia of Physical Science and Technology. — Elsevier BV, 2003. — P. 561–587. doi:10.1016/b0-12-227410-5/00183-6
4. Стыльбанс, Л. С. О работе охлаждающих термоэлементов в нестационарном режиме [Текст] / Л. С. Стыльбанс, Н. А. Федорович // Журнал технической физики. — 1958. — Т. 28, № 3. — С. 12–15.
5. Parrott, J. E. The interpretation of stationary and transient behaviour of refrigerating thermocouples [Text] / J. E. Parrott // Solid-State Electronics. — 1960. — Vol. 1, № 2. — P. 135–143. doi:10.1016/0038-1101(60)90045-9
6. Бабин, В. П. О повышении эффекта термоэлектрического охлаждения при работе термоэлементов в нестационарном режиме [Текст] / В. П. Бабин, Е. К. Иорданишвили // Журнал технической физики. — 1969. — Т. 39, № 2. — С. 399–406.
7. Landecker, K. Study of transient behavior of Peltier junctions [Text] / K. Landecker, A. W. Findley // Solid-State Electronics. — 1961. — Vol. 3, № 3–4. — P. 239–260. doi:10.1016/0038-1101(61)90007-7
8. Hoyos, G. E. Fast transient response of novel Peltier junctions [Text] / G. E. Hoyos, K. R. Rao, D. Jerger // Energy Conversion. — 1977. — Vol. 17, № 1. — P. 45–54. doi:10.1016/0013-7480(77)90057-2
9. Гринберг, Г. А. О нестационарном режиме работы охлаждающих термоэлементов [Текст] / Г. А. Гринберг // Журнал технической физики. — 1968. — Т. 38, № 3. — С. 418–424.
10. Ривкин, А. С. Оптимальное управление нестационарным процессом термоэлектрического охлаждения [Текст] / А. С. Ривкин // Журнал технической физики. — 1973. — Т. 43, № 7. — С. 1563–1570.
11. Idnurm, M. Experiments with Peltier Junctions Pulsed with High Transient Currents [Text] / M. Idnurm, K. Landecker // Journal of Applied Physics. — 1973. — Vol. 34, № 6. — P. 1806–1810. doi:10.1063/1.1702684
12. Field, R. L. Fast transient behavior of thermoelectric coolers with high current pulse and finite cold junction [Text] / R. L. Field, H. A. Blum // Energy Conversion. — 1979. — Vol. 19, № 3. — P. 159–165. doi:10.1016/0013-7480(79)90023-8
13. Иорданишвили, Е. К. Нестационарные процессы в термоэлектрических и термомангнитных системах преобразования энергии [Текст] / Е. К. Иорданишвили, В. П. Бабин. — М.: Наука, 1983. — 216 с.
14. Snyder, G. J. Supercooling of Peltier cooler using a current pulse [Text] / G. J. Snyder, J.-P. Fleurial, T. Caillat, R. G. Yang, G. J. Chen // Journal of Applied Physics. — 2002. — Vol. 92, № 3. — P. 1564–1569. doi:10.1063/1.1489713
15. Yang, R. G. Transient cooling of thermoelectric coolers and its applications for microdevices [Text] / R. G. Yang, G. J. Chen, A. R. Kumar, G. J. Snyder, J.-P. Fleurial // Energy Conversion and Management. — 2005. — Vol. 46, № 9–10. — P. 1407–1421. doi:10.1016/j.enconman.2004.07.004
16. Snarskii, A. A. Rotating thermoelectric device in periodic steady state [Text] / A. A. Snarskii, I. V. Bezudnov // Energy Conversion and Management. — 2015. — Vol. 94. — P. 103–111. doi:10.1016/j.enconman.2015.01.058
17. Shen, L. M. The step-change cooling performance of miniature thermoelectric module for pulse laser [Text] / L. M. Shen, H. X. Chen, F. Xiao, Y. X. Yang, S. W. Wang // Energy Conversion and Management. — 2014. — Vol. 80. — P. 39–45. doi:10.1016/j.enconman.2014.01.003
18. Shen, L. M. Numerical and experimental analysis of transient supercooling effect of voltage pulse on thermoelectric element [Text] / L. M. Shen, F. Xiao, H. X. Chen, S. W. Wang // International Journal of Refrigeration. — 2012. — Vol. 35, № 4. — P. 1156–1165. doi:10.1016/j.ijrefrig.2012.02.004
19. Ma, M. A numerical study on the temperature overshoot characteristic of a realistic thermoelectric module under a current pulse operation [Text] / M. Ma, J. Yu // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2014. — Vol. 72. — P. 234–241. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.01.017
20. Thonhauser, T. Improved supercooling in transient thermoelectric [Text] / T. Thonhauser, G. D. Mahan, L. Zikatanov, J. Roe // Applied Physics Letters. — 2004. — Vol. 85, № 15. — P. 3247–3249. doi:10.1063/1.1806276
21. Mao, J. N. The transient behavior of Peltier junctions pulsed with supercooling [Text] / J. N. Mao, H. X. Chen, H. Jia, X. L. Qian // Journal of Applied Physics. — 2012. — Vol. 112, № 1. — P. 014514-1–014514-9. doi:10.1063/1.4735469
22. Cheng, C.-H. A three-dimensional theoretical model for predicting transient thermal behavior of thermoelectric coolers [Text] / C.-H. Cheng, S.-Y. Huang, T.-C. Cheng // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2010. — Vol. 53, № 9–10. — P. 2001–2011. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.12.056
23. Hao, L. V. Optimal pulse current shape for transient supercooling of thermoelectric cooler [Text] / L. V. Hao, X.-D. Wang, T.-H. Wang, J.-H. Meng // Energy. — 2015. — Vol. 83. — P. 788–796. doi:10.1016/j.energy.2015.02.092
24. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимального управления [Текст] / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1976. — 392 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

В статье предложена математическая модель процесса нестационарного термоэлектрического охлаждения. Учтены основные факторы, влияющие на процесс. Сформулирована задача оптимального управления нестационарным термоэлектрическим охладителем с произвольным числом каскадов. Предложен метод ее решения. Приведены примеры компьютерного моделирования оптимальных функций управления процессом нестационарного охлаждения.

Ключевые слова: нестационарное термоэлектрическое охлаждение, математическое моделирование, оптимальное управление, объект с распределенными параметрами.

Коцур Максим Петрович, аспирант, кафедра системного анализа і теорії прийняття рішень, Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Україна, e-mail: PiramidaM@rambler.ru.

Коцур Максим Петрович, аспирант, кафедра системного аналізу і теорії прийняття рішень, Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Україна.

Kotsur Maxim, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, e-mail: PiramidaM@rambler.ru