



Олійник А. П.,  
Клапоушак О. І.,  
Бачук В. В.,  
Тихонюк І. Я.

## ВІДНОВЛЕННЯ РІВНЯНЬ РОЗВИТКУ ПАВОДКОВИХ ЯВИЩ МЕТОДАМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У роботі запропоновано методику побудови лінійних та нелінійних моделей процесу поширення паводку з використанням методів відтворення виду рівнянь, методу визначників та методу відновлення рівнянь в рамках нелінійних моделей. Проаналізовано випадки, коли результати відновлення співпадають (лінійні моделі), встановлено моделі нелінійного типу, які аналітично пов'язують рівень паводку, час, та швидкість і прискорення розвитку паводку. Визначено напрямки подальших досліджень.

**Ключові слова:** паводкові явища, звичайні диференціальні рівняння, лінійні та нелінійні моделі.

### 1. Вступ

Здійснивши оцінювання наслідків стихійних лих для життєдіяльності людей, фахівцями з екології встановлено, що внаслідок природних катастроф щодня гине у середньому 184 особи, а щороку — кілька тисяч людей (внаслідок катастрофічного паводку 1998 р. на Закарпатті загинуло 17 чол., а паводок 2008 р. забрав життя 30 чол.). 90 % стихійних лих поділяються на 4 типи: тропічні циклони (20 %), повені (40 %), землетруси (15 %) та засухи (15 %) [1].

За даними міжнародної організації UNESCO найбільший відсоток природних уражень, які викликані водною основою припадає саме на високі води (flood) — 50 % [2, 3], які, у свою чергу, спричинені паводками і повенями.

Тому актуальною є задача контролю та прогнозування рівня паводкових вод, з метою попередження, або зменшення можливих збитків у аграрному, промисловому та соціальних секторах економіки від їх негативних наслідків.

### 2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Теорія звичайних диференціальних рівнянь дає ефективний інструмент для моделювання різного роду фізичних процесів, і, зокрема, опису розвитку паводкових явищ, які наносять значних збитків економічному комплексу країн та шкідливо впливають на екологічний стан регіонів. Даній проблемі присвячено значну кількість робіт, в яких використовуються сучасні експериментальні та теоретичні методи досліджень [4–6], задачею даної роботи є побудова систем диференціальних рівнянь математичного опису розвитку паводкових явищ (рівня паводку, його тривалість, максимальні рівні вод) на основі двох основних підходів: відновлення диференціального рівняння за його розвитком з використанням теорії лінійних та нелінійних рівнянь. У роботі [7] наведено спосіб побудови диференціального лінійного рівняння першого порядку, розвитком якого є крива виду:

$$y = t^n \cdot e^{-at}, \quad (1)$$

де  $y$  — рівень паводкових вод;  $n$  та  $a$  — характеристики, які визначаються на основі статистичних даних [8, 9]. Залежність (1) встановлюється на основі аналізу поведінки лінії (1) з точки зору її максимальних значень, наявності точок перегину, тощо. Подання (1) може бути замінена іншими, на основі аналізу даних про розвиток паводків, а також при цьому визначаються оціночні характеристики  $n$  та  $a$ . Для залежності (1), як і для будь-якої функції виду  $y = f(t)$ , можна відтворити диференціальне рівняння першого порядку лінійного типу [7] на основі відомої залежності:

$$\det \begin{vmatrix} y(t) & y'(t) \\ f(t) & f'(t) \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Якщо функцій  $f_i(t)$  є декілька ( $i=1, \dots, N$ ), то можна одержати лінійне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами  $N$ -ого порядку, розв'язками якого будуть  $f_i(t)$ :

$$\det \begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(N)} \\ f_1 & f_1' & \dots & f_1^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_N & f_N' & \dots & f_N^{(N)} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Очевидно, те, що  $f_i$  — розв'язки лінійних рівнянь, що безпосередньо впливають з властивостей визначників, підставляючи у (3) залежність  $y(t)$  одну з функцій  $f_i(t)$ , одержуємо тотожність. Недоліки такого підходу є наступними. Розглянемо функцію виду:

$$f(t) = \frac{C_1 t}{1 + C_2 t^2}, \quad (4)$$

яка за особливостями своєї математичної поведінки (на-явність екстремумів та точок перетину) також може бути використана для опису розвитку паводкових процесів [10].

Використовуючи підхід (2), одержується рівняння:

$$y'(t) \cdot C_1 t - y(t) \cdot \frac{C_1 - C_1 C_2 t^2}{1 + C_2 t^2} = 0. \quad (5)$$

По-перше, висунене рівняння є лінійним, що не визначає всі можливі моделі (наприклад, нелінійні). В багатьох випадках (5) достатньо точно описує явище паводку [10], проте в окремих випадках такий опис не дає задовільної відповідності з експериментально визначеними картинами розвитку паводку. Крім того, вимагає значних зусиль розрахунків або оцінка на основі статистичних даних значень коефіцієнтів  $C_1$  та  $C_2$ , ефективні засоби визначення яких стосується лише окремих випадків вивчення паводкових явищ. Очевидно, рівняння типу (5) дають точний опис, наприклад, асимптотичної поведінки  $y(t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) \cdot (C_1 - C_1 C_2 t)}{1 + C_2 t^2} = 0,$$

тобто, з розвитком паводкової ситуації, інтенсивність виходить на сталий (нульовий) рівень, проте задача розроблення нових методів опису паводкових явищ з використанням нелінійних рівнянь та систем залишається актуальною.

### 3. Об'єкт, мета та задачі дослідження

Об'єктом даної роботи є процес виникнення паводкових вод, метою — забезпечення екологічної безпеки довкілля шляхом контролю і прогнозування рівня паводкових вод методами математичного моделювання.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі задачі:

1) визначити набір параметрів, які впливають на формування та розвиток паводку (наприклад, метеорологічні дані (кількість атмосферних опадів, вологість та температура повітря, напрям і швидкість вітру, атмосферний тиск); морфометричні характеристики басейну (площа водозбору, похил місцевості) і т. д.) на основі статистичних даних про параметри та відповідний їм рівень паводкових вод;

2) на основі статистичних даних про паводкові явища, для кожного з них вибрати значення рівня паводкових вод у момент часу; визначити характерні параметри  $n$  та  $a$ ;

3) здійснити побудову кривих на основі статистичних даних про параметри (підпункт 2) та відповідний їм рівень води у період паводків чи повеней.

### 4. Математичний апарат методики прогнозування рівня паводкових вод на основі диференціальних рівнянь

Математичний апарат оснований на використанні методів побудови лінійних диференціальних рівнянь (2) та (3), як було зазначено, обмежує клас опису можливих моделей лише лінійними, в той час, як використан-

ня методики відтворення рівняння моделі на основі багато параметричних залежностей дозволяє встановити нелінійні рівняння, що описують паводкові явища. Основою такого підходу є методика відтворення рівняння на основі його розв'язку. З метою побудови апроксимуючих кривих, які будуть краще апроксимувати статистичні (експериментальні) дані і описувати процес паводкових вод, запропоновано використовувати функцію виду:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x^2. \quad (6)$$

Необхідно відновити диференціальне рівняння, розв'язком якого є (6). Для цього виразимо  $C_1$  та  $C_2$  через відповідні похідні та підставимо у (6):

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 x^2, \\ y' = C_1 e^x + 2C_2 x, \\ y'' = C_1 e^x + 2C_2. \end{cases} \quad (7)$$

З двох останніх рівнянь системи (7) одержується:

$$\begin{cases} y' = C_1 e^x + 2C_2 x, \\ y'' = C_1 e^x + 2C_2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' - y'' = 2C_2(x-1), \\ y' - y'' x = C_1(e^x - e^x x), \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{y' - y''}{2(x-1)}, \\ C_1 = \frac{y' - y'' x}{e^x(1-x)}. \end{cases} \quad (8)$$

На основі (7) та (8) одержується рівняння, розв'язком якого є (6):

$$y = \frac{y' - y'' x}{(1-x)} + \frac{(y' - y'') x^2}{2(x-1)}. \quad (9)$$

Зауважимо, що рівняння (9) є лінійним, тобто, якщо (6) містить лінійну комбінацію деяких функцій, то результати, одержані за методикою (7) співпадають з результатами, одержаними за (3). Використовуючи (6) і (3), одержується:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ e^x & e^x & e^x \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad 2y + 2y''x + x^2y' - x^2y'' - 2xy - 2y' = 0. \quad (10)$$

Очевидно, рівняння (9) та (10) співпадають. Розглянемо випадок, коли у (6) невідомі коефіцієнти входять нелінійно.

Реалізуючи описаний підхід, до залежностей (1) та (4), для залежності (1) одержуємо наступні перетворення шляхом логарифмування:

$$\begin{cases} y = t^n \cdot e^{-at}, \\ \ln y = n \ln t - at. \end{cases} \quad (11)$$

Система для визначення  $n$  та  $a$  набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{y'}{y} = \frac{n}{t} - a, \\ \frac{y''y - y'^2}{y^2} = -\frac{n}{t^2}, \end{cases} \quad (12)$$

звідки:

$$\begin{cases} n = \frac{y'^2 - y''y}{y^2} t^2, \\ a = \frac{y'^2 t - y''y t - y'y}{y^2}. \end{cases} \quad (13)$$

При цьому одержується наступна нелінійна система II порядку для визначення  $y(t)$  — рівня паводку;  $y'(t) = x(t)$  — швидкість його розвитку:

$$\begin{cases} y' = x, \\ x' = \frac{y^2 \ln y - x^2 t^2 \ln t + x^2 t^2 - xyt}{yt^2 - yt^2 \ln t}. \end{cases} \quad (14)$$

Задаючи для системи (14) початкові умови:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \end{cases} \quad (15)$$

або граничні умови виду:

$$\begin{cases} y(t_1) = y_2, \\ y'(t_2) = y_3, \end{cases} \quad (16)$$

де  $(t_1, t_2)$  — інтервал найбільш інтенсивного розвитку паводку, можна одержати розв'язком (14)–(16), наприклад, з використання Рунге-Кутта потрібного порядку точності.

Для залежності (4):

$$y = \frac{C_1 t}{1 + C_2 t^2}. \quad (17)$$

Повторюючи міркування (11)–(13) одержується:

$$\begin{cases} y = \frac{C_1 t}{1 + C_2 t^2}, \\ C_2(y't^2 + 2yt) - C_1 = -y', \\ -C_2(y''t + 4y't + 2y) = y''. \end{cases} \quad (18)$$

Диференціальне рівняння математичної моделі розвитку паводку на основі емпіричної моделі записується у вигляді:

$$y = \frac{4t^2 y'^2 + 2y y' t - 2y y'' t^2}{4t y' + 2y}, \quad (19)$$

яка також може бути розв'язана з умовами типу (15)–(16).

## 5. Обговорення результатів дослідження методики прогнозування рівня паводкових вод на основі диференціальних рівнянь

У результаті проведених досліджень встановлено, що використання існуючих методів моніторингу за рівнем паводкових вод (детермінований та імовірнісний, метод базового процесу) не забезпечують оперативного їх прогнозування та їм характерні наступні недоліки:

- необхідність ручного вибору значення кроку моделювання;
- необхідність використання декількох зображень.

Розроблені рівняння розвитку паводкових явищ методами звичайних диференціальних рівнянь дозволять проконтролювати динаміку зміни води річок у період паводків, повеней чи підтоплень, а також прослідкувати вплив метеорологічних даних, водно-фізичних властивостей ґрунтів, морфометричних характеристик басейну і т. д. Даний контроль за паводковими явищами виступатиме вихідними даними для прогнозування паводків з метою попередження їх негативного впливу на довкілля.

Після проведення експериментальних досліджень отримані результати можна передати гідрометеорологічним центрам України та використовувати у навчальних курсах дисциплін.

Відновлення рівнянь розвитку паводкових явищ методами звичайних диференціальних рівнянь є вдосконаленням раніше розробленого методу прогнозування рівня паводкових вод на основі побудови кривих прогнозу зміни рівня паводкових вод у часі з використання асоціативного аналізу.

## 6. Висновки

У результаті проведених досліджень:

1. Показано, що обробку статистичних даних про зміну рівня паводкових вод у часі та відповідні їм параметри краще здійснювати методом асоціативного аналізу для виявлення вагомих природних факторів впливу на підняття води річок у період природних катаклізмів, таких як паводки чи повені.

2. У формулі (13) представлено визначення характерних параметрів  $n$  та  $a$ , що опираються на статистичні дані про зміну рівня паводкових вод у часі.

3. Створено теоретичні передумови для побудови кривих розвитку паводкових явищ методами звичайних диференціальних рівнянь (14) та (19), що дозволять визначати тривалість паводкових вод, інтенсивність, період спаду та підйому, прослідкувати за зміною метеорологічних факторів, таких як атмосферні опади, вологість повітря і т. д.

4. Особливістю моделей (14) та (19) є те, що в них відсутні будь-які додаткові характеристики процесів  $(n, a, C_1, C_2)$ , а вид кривих визначається лише граничними або початковими умовами. Деяка математична складність (громіздкість) залежностей (14) та (19) компенсується чисельним характером відповідних розв'язків. Фактично, рівняння розвитку паводку містить лише математичні зв'язки між рівнем паводка  $y(t)$ , швидкістю та прискоренням його розвитку (відповідно  $y'(t)$  та  $y''(t)$ ).

**Література**

1. Димань, Т. М. Екологія людини [Текст] / Т. М. Димань. — К.: Академія, 2009. — 376 с.
2. Manual on flood forecasting and warning [Text]. — Switzerland, Geneva: World Meteorological Organization, 2011. — № 1072. — 142 p.
3. Ward, R. Floods, a geographical perspective [Text] / R. Ward. — London: Macmillan, 1978. — 244 p.
4. System and method for predicting and preventing flooding [Electronic resource]: Patent WO 2013063699 A1 / Moss I., Tremblay R.; Insurance Bureau of Canada. — PCT/CA2012/050772; filed 31.10.2012; published 10.05.2013. — Available at: \www/URL: <http://www.google.com/patents/WO2013063699A1?cl=en>
5. Автоматичні гідрологічні станції [Електронний ресурс] // Український гідрометеорологічний центр. — Режим доступу: \www/URL: <http://hydro.meteo.gov.ua/>
6. Гребінь, В. В. Оцінка можливості оперативного прогнозування дощових паводків на річках басейнів Прута та Сірету [Текст] / В. В. Гребінь, О. І. Лук'янець, І. І. Ткачук // Український гідрологічний журнал. — 2012. — № 10. — С. 164–175.
7. Маслова, Т. В. Оцінювання зволоженості гірських водозборів при математичному моделюванні дощових паводків [Текст] / Т. В. Маслова, М. М. Сусідко // Наукові праці УкрНДГМІ. — 2007. — Вип. 256. — С. 233–238.
8. Zamikhovskii, L. M. The flood process mathematical modelling and their prediction methods based on static data [Text] / L. M. Zamikhovskii, A. P. Oliinyk, O. I. Klapoushchak, L. O. Shtaiyer // Life Science Journal. — 2014. — № 11(8s). — P. 473–477.
9. Олійник, А. П. До математичного прогнозування рівня паводкових вод [Текст] / А. П. Олійник, О. І. Клапоуцак // Прикарпатський вісник Наукового товариства ім. Шевченка. Серія «Число». — 2014. — № 1(28). — С. 246–253.
10. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен [Текст]: пер. с англ. / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. — М.: Мир, 1990. — Т. 1. — 384 с.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАЗВИТИЯ ПАВОДКОВЫХ ЯВЛЕНИЙ МЕТОДАМИ ОБЫЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

В работе предложена методика построения линейных и нелинейных моделей процесса распространения паводка с использованием методов воспроизведения вида уравнений, метода определителей и метода восстановления уравнений в рамках

нелинейных моделей. Проанализированы случаи, когда результаты восстановления совпадают (линейные модели), установлено модели нелинейного типа, аналитически связывают уровень паводка, время, и скорость, и ускорение развития паводка. Определены направления дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** паводковые явления, обыкновенные дифференциальные уравнения, линейные и нелинейные модели.

*Олійник Андрій Петрович, доктор технічних наук, професор, кафедра математичних методів у інженерії, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Україна.*

*Клапоуцак Оксана Ігорівна, кандидат технічних наук, асистент, кафедра комп'ютерних технологій в системах управління і автоматизації, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Україна, e-mail: [oksana\\_kl@meta.ua](mailto:oksana_kl@meta.ua).*

*Бачук Василь Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математичних методів у інженерії, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Україна.*

*Тихонюк Ірина Ярославівна, вчитель біології, Івано-Франківська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 10, Україна.*

*Олійник Андрей Петрович, доктор технических наук, профессор, кафедра математических методов в инженерии, Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа, Украина.*

*Клапоуцак Оксана Игоревна, кандидат технических наук, ассистент, кафедра компьютерных технологий в системах управления и автоматизации, Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа, Украина.*

*Бачук Василий Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических методов в инженерии, Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа, Украина.*

*Тыхонюк Ирина Ярославовна, учитель биологии, Ивано-Франковская общеобразовательная школа I-III ступеней № 10, Украина.*

*Olijnyk Andriy, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ukraine.*

*Klapoushchak Oksana, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ukraine, e-mail: [oksana\\_kl@meta.ua](mailto:oksana_kl@meta.ua).*

*Bachuk Vasil, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ukraine.*

*Tykhoniuk Iryna, Ivano-Frankivsk School I-III levels № 10, Ukraine*

УДК 519.853

DOI: 10.15587/2312-8372.2016.66650

**Зеленцов Д. Г.,  
Денисюк О. Р.**

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ КОРРОДИРУЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СКОЛЬЗЯЩЕГО ДОПУСКА

В работе предлагается новый эффективный алгоритм решения задач оптимизации корродирующих шарнирно-стержневых конструкций, предполагающий получение решения с заданной точностью. Оптимизационный алгоритм использует метод скользящего допуска совместно с генетическим алгоритмом и нейросетевым модулем для управления погрешностью вычисления функций ограничений. Поиск решения осуществляется на дискретном неметрическом пространстве варьируемых параметров.

**Ключевые слова:** коррозия, дискретная оптимизация, метод скользящего допуска, нейронные сети, генетический алгоритм.

**1. Введение**

В процессе эксплуатации металлоконструкций, используемых, в частности, в химической промышлен-

ности, наблюдается заметное ухудшение их рабочих характеристик в результате коррозионного износа, вызываемого воздействием сильноагрессивных рабочих сред. Это проявляется в виде уменьшения геометрических