ISSN 2226-3780

УДК 539
DOI: 10.15587/2312-8372.2017.90520

**Гаджиев В. Д.,
Шириев А. И.**

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕОДНОРОДНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрена осесимметричная форма собственных колебаний ортотропной неоднородного по радиусу круговой пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Подробно изучен случай, когда по всему контуру пластина жестко защемлена. Решение задачи строилось с применением метода разделения переменных и метода ортогонализации Бубнова-Галеркина. Проведен численный анализ при конкретных значениях характерных параметров.

Ключевые слова: *пластинка, непрерывность, ортотропность, плотность, основания, частота, модули упругости, уравнение движения.*

1. Введение

В настоящее время при строительстве крупных инженерных комплексов и в различных отраслях техники и машиностроении широко используются пластинки и оболочки, изготовленные из различных ортотропных материалов [1]. Среди них наиболее распространенными являются круговые ортотропные пластинки.

При расчете на устойчивость, определения частотно амплитудных характеристик появляется необходимость учета при эксплуатации влияния сопротивления окружающей среды. Очевидно, что учет одновременно ортотропности, неоднородности, переменности плотности и сопротивления внешней среды гораздо осложняет математическое решение задачи. Не учет же этих параметров может привести к существенным ошибкам (особенно в динамических задачах). Учитывая, что в различных отраслях техники, машиностроении и строительстве широко применяются ортотропно неоднородные пластинки, в данной работе решается задача свободного колебания круговой пластинки с учетом неоднородного вязкоупругого сопротивления внешней среды.

2. Объект исследования и его технологический аудит

Объектом исследования являются неоднородные круговые пластинки, лежащие на неоднородно вязкоупругих основаниях.

Предполагается, что модули упругости и плотности пластинки являются непрерывными функциями текущего радиуса. В этом случае в отличие от однородных пластинок, уравнение движения является сложным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. В связи с этим появляется необходимость построения приближенно аналитического способа решения.

Для выявления особенности неоднородных круговых пластинок с точки зрения расчета проводится технологический аудит, имеющий целью определить значения круговых частом в случае жесткого защемления по контуру пластинки.

3. Цель и задачи исследования

Целью работы является исследование влияния одновременного учета ортропности непрерывно неоднородности по текущему радиусу и учета неоднородного вязкоупругого сопротивления основания.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить такие задачи:

1. Определить факторы, влияющие на значение круговой частоты.
2. Определить существенное влияние ортропности, неоднородности пластинки и вязкоупругости среды.
3. Получить дифференциальные уравнения движения с переменными коэффициентами.

4. Исследование существующих решений проблемы

В теоретико-экспериментальных исследованиях показано, что в результате ряда причин, упругие модули и плотность элементов конструкций существенным образом могут являться непрерывными функциями пространственных координат [1–3]. В данной работе, исходя из публикаций [4, 5], предполагается, что модули упругости и плотность зависят от текущего радиуса круговой ортотропной пластинки.

В [1] изложены основные вопросы теории неоднородных упругих тел в рамках линейной теории и решения конкретных задач об определении напряженно деформированного состояния без учета сопротивления внешней среды. В [2, 3] введены основные уравнения устойчивости ортотропно неоднородных прямоугольных пластин и цилиндрических, а также конических оболочек без учета сопротивления внешней среды.

В [4] решается задача колебания упругой балки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании.

В работе [5] рассмотрены некоторые вопросы напряженно деформированного состояния круговых однородных пластинок переменной толщины. Подробно изложена теория изгиба анизотропных пластин, но при этом влияние сопротивления окружающей среды не рассматривалось.

В [6–8] изложены вопросы, связанные с упругими основаниями, где указывается модель Винклера, которая экспериментами не подтверждается.

В [7] рассмотрены колебания с учетом сопротивления основания типа Пастернека. В [8] решена задача поперечного колебания неоднородного по длине прямого участка трубопровода, лежащего на основании типа Пастернака. В [9–12] изложены вопросы динамики элементов однородных упругих и вязкоупругих материалов и решены многочисленные прикладные задачи. При этом влияние сопротивления внешней среды не рассматривалось.

Таким образом, результаты анализа позволяют сделать вывод о том, что для правильного расчета амплитудных, частотных характеристик необходимо построить методики решения с учетом неоднородности пластинки и основания.

5. Методы исследований

В ходе проведения работы использовались в основном материалы работ [1–3]. Также при исследовании использовались методы разделения переменных и метод ортогонализации Бубнова-Галеркина, который дает эффективный результат при однородных краевых условиях.

6. Результаты исследований

В работе краевые условия является однородными. Отметим, что при неоднородных краевых условиях метод ортогонализации Бубнова-Галеркина применять нельзя.

Реакция основания связана с прогибом следующим соотношением [6, 7]:

$$q = k_1(r)W + k_2(r)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $k_1(r)$, $k_2(r)$ — непрерывные функции, которые характеризуют свойства основания и определяются экспериментальным путем. Плотность ρ с текущим радиусом связана следующим образом:

$$\rho = \rho_0 \psi(r), \tag{2}$$

где ρ_0 соответствует однородному случаю; $\psi(r)$ — непрерывная функция модули упругости; E_1 и E_2 также зависят от r. Коэффициенты Пуассона принимаются постоянными:

$$E_1 = E^0 f(r);\ E_2 = E_2^0 f(r);$$
$$\nu_1 = \text{const};\ \nu_2 = \text{const},$$

где $f(r)$ — функция со своими производными до второго порядка являются непрерывными функциями. Связь между изгибающими моментами и прогибом выражается следующими соотношениями [9, 10]:

$$M_1 = -D_1^0 f(r)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu_1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right),$$
$$M_2 = -D_2^0 f(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \nu_2\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right), \tag{3}$$

где:

$$D_1^0 = \frac{E_1^0 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)};\ D_2^0 = \frac{E_2^0 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},$$

где h — толщина пластинки; $E_1^0, E_2^0, \nu_1, \nu_2$ — соответствуют однородному случаю. Уравнения движения в данном случае с учетом (1) и (2) записываются следующем виде [8, 9]:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(M_1 - \frac{1}{2}M_2\right) + k_1(r)W +$$
$$+ k_2(r)\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \rho_0\psi(r)\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = 0. \tag{4}$$

Учитывая (3) в (4), получаем:

$$L(W) - \bar{k}_1(r)W - \left(\bar{k}_2(r) + \rho_0\psi(r)\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right) = 0, \tag{5}$$

где приняты следующие обозначения:

$$L(w) = f(r)\frac{\partial^4 W}{\partial r^4} + \left(2\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\nu_1 + 2}{r}f(r) - \frac{\beta\nu_2}{r}\right)\frac{\partial^3 W}{\partial r^3} -$$
$$-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2(\nu_{i+1})}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\beta}{r^2}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r^2}\left(\nu_1\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial W}{\partial r},$$

где:

$$\bar{k}_1(r) = k_1(r)(D_1^0)^{-1},\ \bar{k}_2(r)(D_1^0)^{-1},$$
$$\beta = D_2^0(D_1^0)^{-1}.$$

Как видно, уравнение (5) является сложным и получение точного решения даже при простых видах неоднородности $f(r)$, $\psi(r)$, $k_1(r)$, $k_2(r)$ затруднительно или же невозможно. Поэтому при решении поставленной задачи будем использовать приближенно аналитический способ решения. На первом этапе используем метод разделения переменных и в дальнейшем метод ортогонализации Бубнова-Галеркина. Решение на первом этапе будем искать в следующем виде:

$$W(r,t) = V(r)e^{i\omega t}, \tag{6}$$

где функция $V(r)$ должна удовлетворять краевым условиям; ω — круговая частота. Подставляя (6) в уравнение (5) получим:

$$\bar{L}(V) - \bar{k}_1 V - \omega^2(\bar{k}_2(r) + \bar{\rho}_0(r))V = 0. \tag{7}$$

При решении (7) будем использовать метод Бубнова-Галеркина и решение будем искать в следующем виде:

$$V(r) = \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(r), \tag{8}$$

где c_i — неизвестные постоянные и подлежат определению, а каждый $\varphi_i(r)$ должен удовлетворять соот-

 ISSN 2226-3780

ветствующим краевым условиям. Учитывая (8) в (7), определяем функцию ошибки:

$$\eta(r)=\sum_{i=1}^{n} C_i\begin{bmatrix}(L(\varphi_i(r))-\bar{k}_1\varphi_i(r)+\\ +\,\omega^2(\bar{k}_2(r)+\rho_0\psi(r))\end{bmatrix}\varphi_i(r)\neq 0.$$

Условия ортогонализации с учетом (9) записываются в следующем виде:

$$\int_0^R \eta(r)\phi_q(r)rdr=0,\ q=1,\ 2,\ \ldots \tag{10}$$

В общем случае ω^2 определяется из условия равенства нулю основного определителя из системы однородных алгебраических уравнений, составленных из (10) относительно постоянных C_i (система является линейной):

$$\left\|\omega^2\right\|=0. \tag{11}$$

При раскрытии (11) относительно ω^2 получим алгебраическое уравнение n-й степени. Однако обычно (в основном для круговых и кольцевых пластин) пренебрегают определением основного тона круговой частоты, хотя нахождение ω^2 при произвольном приближении не вызывает особенной трудности.

В первом приближении (10) записывается как:

$$\int_0^R \varphi_1(r)\eta(r)rdr=0, \tag{12}$$

или же:

$$\int_0^R\left[L(\varphi_1)+\bar{K}_1\varphi_1(r)-\omega^2(\bar{K}_2(r)+\bar{\rho}_0\psi(r))\right]\varphi_1(r)rdr=0.$$

Отсюда получим:

$$\omega^2=\frac{\int_0^R\left[\bar{L}(\varphi_1)+\bar{K}_1\varphi_1\right]\varphi_1(r)rdr}{\int_0^R(\bar{K}_2(r)+\bar{\rho}_0\psi(r))\varphi_1^2rdr}. \tag{13}$$

Рассмотрим случай, когда пластина по всему контуру жестко защемлена. В этом случае функция $\varphi_1(r)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi_1=0;\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=0\ \text{ при }\ r=R.$$

Функцию φ_1 выбираем в следующем виде:

$$\kappa_1=f_0\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2, \tag{14}$$

где f_0 — значение прогиба центра пластинки.

Из формулы (13) при $K_2=0$ получим решение аналогичной задачи для основания Фусса-Винклера:

$$\omega^2=\frac{\int_0^R\bar{L}_1(\varphi_1)\varphi_1(r)rdr+\int_0^R\bar{K}_1(\varphi_1)\varphi_1^2(r)rdr}{\bar{\rho}_0\int_0^R\psi(r)\varphi_1^2(r)rdr}. \tag{15}$$

При $K_1(r)=0;\ K_2\neq(r)$ получим решение аналогичной задачи, когда пластинка лежит на неоднородно-вязком основании:

$$\omega_2^2=\frac{\int_0^R\bar{L}_1(\varphi_1)\varphi_1(r)rdr}{\int_0^R(\bar{K}_0(r)+\bar{\rho}_0\psi(r))\varphi_1^2(r)rdr}. \tag{16}$$

Из (13) и (15) получим следующую связь между ω^2 и ω_2^2:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2=\frac{\bar{\rho}_0\int_0^R\psi(r)\varphi_1(r)rdr}{\int_0^R(\bar{K}_2(r)+\bar{\rho}_0\psi(r))\varphi_1^2(r)rdr}. \tag{17}$$

Результаты численного расчета значения круговой частоты с учетом ортотропности переменности модулей упругости, плотности, а также неоднородно вязкоупругого сопротивления показаны в табл. 1 и на рис. 1. Анализ численного расчета показывает, что значение круговой чистоты естественным образом зависит от функции $f(r)$, $\psi(r)$, $k_1(r)$, $k_2(r)$ и функции аппроксимации.

Таблица 1

Результаты численного расчета значения круговой частоты

$\mu=0$	$\bar{\omega}_1^2$	$\bar{\omega}_2^2$
0	1	1
0,2	0,931	0,773
0,4	0,871	0,630
0,6	0,819	0,531
0,8	0,772	0,460
1	0,730	0,405

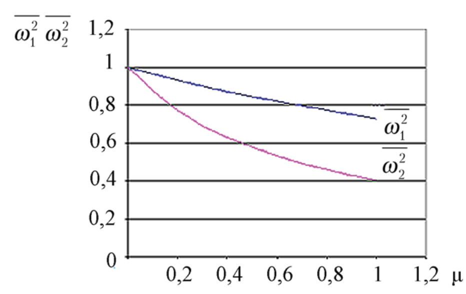

Рис. 1. График зависимости безразмерных значений чистоты от параметра неоднородности плотности

На рис. 1 видно, что значение круговой частоты существенным образом зависит от переменности плотности.

Численный анализ можно проводить при следующих значениях характерных параметров:

$$f(r)=1+\varepsilon\frac{r}{R};\ \psi(r)=1+\mu\frac{r}{R};$$

$$K_1=K_1^0\left(1+\alpha\frac{r}{R}\right);\ K_2=K_2^0\left(1+\alpha\frac{r}{R}\right);$$

$$\varepsilon\in[0,1];\ \mu\in[0,1];\ \alpha\in[0,1], \tag{18}$$

где K_1^0 и K_2^0 соответствуют характеристикам однородных вязкоупругих сред.

Для простоты анализа, расчет проведем для случая однородной среды без учета вязкого сопротивления:

$$\psi(r)=1+\varepsilon\rho;\ \psi(r)=1+\mu e^{\rho}. \tag{19}$$

$$\bar{\omega}_1^2=\frac{\int\limits_0^1 \varphi_1^2(\rho)\rho\, d\rho}{\int\limits_0^1 (1+\mu\rho)\varphi_1^2(\rho)\rho\, d\rho},\quad \rho=r\cdot R^{-1}.$$

Учет неоднородности существенным образом зависит от величины круговой частоты.

7. SWOT-анализ результатов исследований

Strengths. Среди сильных сторон данного исследования необходимо отметить, что при решении получены конкретные расчетные формулы. Полученные формулы позволяют при известных характеристиках пластинки и основания определить значение круговой частоты.

Weaknesses. Слабые стороны данного исследования связаны с тем, что предложенные решения основаны на том, что при решении применяются приближенные аналитические методы и однородные краевые условия. Причиной этого являются сложные уравнения движения.

Opportunities. Перспективы дальнейших исследований заключаются в том, что данные методики расчета можно распространить, например, на решение задач колебаний оболочек.

Threats. Сложности для внедрения полученных результатов исследований связаны с тем, что нет экспериментальных исследований.

8. Выводы

1. Показано, что на значение круговой частоты существенным образом влияют следующие факторы.

— ортотропность неоднородности по текущему радиусу модулей упругости;

— переменность плотности по текущему радиусу;

— сопротивление неоднородно вязкоупругой среды.

2. В работе решена задача о собственном колебании круговой неоднородной ортотропной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Показано существенное влияние ортропности, неоднородности пластинки и вязкоупругости среды — табл. 1 и рис. 1.

3. Получено уравнение движения с учетом неоднородности пластинки и основания. Уравнения является сложным с переменными коэффициентами и для получения точного решения используются приближенные аналитические способы.

Литература

1. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел [Текст] / В. А. Ломакин. — Москва: МГУ, 1976. — 376 с.
2. Haciyev, V. G. Stability of continuality non homogeneous, orthotropic rectangular plates render in plane compressions [Text] / V. G. Haciyev, N. G. Agamaliyrv, B. D. Mirzoeva // In Sump. on Eng and Artutural sciences Balcan Caucassand Turkir. Perplic. — Spart, Turkey, 2002. — P. 74–78.
3. Sofiyev, A. H. Effect of the two-parameter elastic foundation on the critical parameters of nonhomogeneous orthotropic shells [Text] / A. H. Sofiyev, E. Schnack, V. C. Haciyev, N. Kuruoglu // International Journal of Structural Stability and Dynamics. — 2012. — Vol. 12, № (05). — P. 1250041. doi:10.1142/s0219455412500411
4. Garnet, H. Free Vibrations of Reinforced Elastic Shells [Text] / H. Garnet, A. Levy // Journal of Applied Mechanics. — 1969. — Vol. 36, № 4. — P. 835–844. doi:10.1115/1.3564779
5. Коваленко, А. Д. Круглые пластины переменной толщины [Текст] / А. Д. Коваленко. — Москва, 1959. — 294 с.
6. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании [Текст] / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. — 2-е изд., перер. и доп. — Москва: Госстройиздат, 1962. — 239 с.
7. Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели [Текст] / П. Л. Пастернак. — Москва: Госстройиздат, 1954. — 89 с.
8. Клепников, С. Н. Расчет конструкций на упругого основании [Текст] / С. Н. Клепников. — Киев: Будивельник, 1967. — 184 с.
9. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки [Текст] / С. Г. Лехницкий. — Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1967. — 463 с.
10. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С. П. Тимошенко. — Москва: Наука, 1967. — 444 с.
11. Ржаницын, А. Р. Строительная механика [Текст]: учеб. пос. для вузов / А. Р. Ржаницын. — Москва: Высшая школа, 1982. — 400 с.
12. Гаджиев, В. Д. Поперечное колебание прямого участка неоднородного трубопровода, лежащего на двухконстантном основании [Текст] / В. Д. Гаджиев, Х. Г. Джафаров // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2014. — № 6/7 (72). — С. 4–7. doi:10.15587/1729-4061.2014.31195

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ КРУГОВОЇ ПЛАСТИНКИ, ЩО ЛЕЖИТЬ НА НЕОДНОРІДНІЙ В'ЯЗКОПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Розглянуто вісісиметричну форму власних коливань ортотропної неоднорідної по радіусу кругової пластинки, що лежить на неоднорідній в'язкопружній основі. Детально вивчено випадок, коли по всьому контуру пластина жорстко затиснена. Рішення завдання будувалося із застосуванням методу поділу мінливих і методу ортогоналізації Бубнов-Гальоркіна. Проведено чисельний аналіз при конкретних значеннях характерних параметрів.

Ключові слова: пластинка, безперервність, ортотропність, щільність, основа, частота, модулі пружності, рівняння руху.

Гаджиев Вагиф Джамал оглы, *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом теории упругости и пластичности, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана, Баку, Азербайджан, e-mail: vagif.haciyev.imm@gmail, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9766-385X*

Шириев Азиз Интизар оглы, *Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджан, Баку, Азербайджан, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4050-5049*