

УДК 330.4

ПРОБЛЕМИ ДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОКАЗНИКІВ НАЦІОНАЛЬНИХ ЕКОНОМІК**Полшков Ю. М.**, к.ф.-м.н., доцент, донецький національний університет, м. Донецьк**Полшков Ю. М. Проблеми динамічного моделювання показників національних економік.**

У даному дослідженні розглядаються річні відомості про валовий внутрішній продукт, споживчі витрати, валові інвестиції, обсяг зовнішньої торгівлі. Такий підхід передбачає, що час є дискретною змінною з кроком в один рік. Цей факт дає можливість задіяти кінцево-різницеві рівняння. У таких моделях передбачається, що держава регулює споживчий ринок. Основна гіпотеза полягає в тому, що кожен, з названих вище макроекономічних показників, окремо залежить від валового внутрішнього продукту. Це припущення дає можливість побудувати за допомогою методу найменших квадратів лінійні економетричні моделі. Підсумкова модель – це динамічна модель з дискретним часом, яка дозволяє будувати точковий прогноз для валового внутрішнього продукту майбутнього року, спираючись на значення валового внутрішнього продукту в поточному і попередньому роках. Достовірність моделі перевірена на конкретних даних економіки Сінгапуру за двадцять років. Прогноз порівнювався з фактичним значенням валового внутрішнього продукту. Розбіжність вийшла незначною, тому такі прогнози можна визнати достовірними, як мінімум в короткостроковій перспективі. З математичної точки зору отримана модель є неоднорідним кінцево-різницевим рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. У роботі докладно обговорюються особливості таких рівнянь. Вводиться в розгляд характеристичне рівняння, яке є квадратним рівнянням. Його дискримінант може бути додатним, рівним нулю і від'ємним. Ці три випадки досліджуються в статті. Вони зіставляються з аналітичної та графічної точок зору. Це дає можливість розрізнити національні економіки, як економіки стійкого зростання, «однобокі», слабкі або ті, що знаходяться в стадії вдалого реформування. Наведено конкретні приклади економік даних типів.

Полшков Ю.Н. Проблемы динамического моделирования показателей национальных экономик.

В данном исследовании рассматриваются годовые сведения о валовом внутреннем продукте, потребительских расходах, валовых инвестициях, объёме внешней торговли. Такой подход предполагает, что время является дискретной переменной с шагом в один год. Этот факт даёт возможность задействовать конечно-разностные уравнения. В таких моделях предполагается, что государство регулирует потребительский рынок. Основная гипотеза состоит в том, что каждый, из названных выше макроекономических показателей, по отдельности зависит от валового внутреннего продукта. Это предположение даёт возможность построить с помощью метода наименьших квадратов линейные эконометрические модели. Итоговая модель – это динамическая модель с дискретным временем, которая позволяет строить точечный прогноз для валового внутреннего продукта будущего года, опираясь на значения валового внутреннего продукта в текущем и предыдущем годах. Достоверность модели проверена на конкретных данных экономики Сингапура за двадцать лет. Прогноз сравнивался с фактическим значением валового внутреннего продукта. Расхождение получилось незначительным, поэтому такие прогнозы можно признать состоятельными, как минимум в краткосрочной перспективе. С математической точки зрения полученная модель является неоднородным конечно-разностным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. В работе подробно обсуждаются особенности таких уравнений. Вводится в рассмотрение характеристическое уравнение, которое является квадратным уравнением. Его дискриминант может быть положительным, равным нулю и отрицательным. Эти три случая исследуются в статье. Они сопоставляются с аналитической и графической точек зрения. Это даёт возможность различать национальные экономики, как экономики устойчивого роста, «однобокие», слабые или те, что находятся в стадии удачного реформирования. Приведены конкретные примеры экономик данных типов.

Pokshkov Y. M. Problems of national economies dynamic indexes.

In this article has been done analyses of annual data of GDP, consumer spending, gross investment and foreign trade volume. This approach assumes that time is a discrete variable in increments of one year. This fact makes it possible to use the finite-difference equations. In these models, it is assumed that the state regulates the consumer market. The main hypothesis is that each of the above mentioned macroeconomic indicators individually depends on the gross domestic product. This assumption makes it possible to build with the direct econometrical models. The final model - a dynamic model with discrete time, which allows you to build a point forecast for gross domestic product next year, based on the value of gross domestic product in the current and previous years. The reliability of the model is tested on the data of Singapore's economy of last twenty years. This forecast compared with the actual value of the gross domestic product. Received minor discrepancy, so these forecasts can be considered viable, at least in the short term. From a mathematical point of view, the resulting model is non-uniform finite-difference equations with constant coefficients. This paper discusses in detail the features of such equations. It was introduced the characteristic equation, which is a quadratic equation. Its result can be positive, zero or negative. These three possible results are investigated in

this article. They are compared with the usage of analytical and graphical methods. This makes it possible to distinguish the national economy as the sustainable growth of the economy, "one-sided", the weak, or those that are in the process of successful reform. It was proposed examples of these types of economies.

Постановка проблеми. Підсумки економічної діяльності підводять за рік. Дослідник має річні дані по валовому випуску, валового внутрішнього продукту (ВВП), національному доходу, інвестиціях тощо. Будемо розглядати час як дискретний показник з кроком в один рік. Це приводить до кінцево-різницевого рівнянь макроекономічної динаміки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Математичним моделюванням за допомогою кінцево-різницевого рівнянь займалися Дж. Кейнс, П. Самуельсон, Дж. Хікс та інші вчені [1, с. 488-511]. Докладний аналіз таких моделей є в роботах В. Колемаєва [2, с. 36-44].

Формулювання невирішених проблем. Дані моделі відносять до моделей кейнсіанського типу. Передбачається, що держава регулює споживчий ринок. Це виражається в тому, що планована пропозиція дорівнює прогнозованому попиту. Автор даного дослідження вважає, що моделі кінцево-різницевого рівнянь можуть бути поліпшені за допомогою економетричних методів.

Ціль статті. Передбачається розробити математичну модель, яка поєднала б у собі основні постулати Кейнса і сучасний погляд на природу макроекономічної динаміки. Представляє інтерес вивчити прогнозні можливості таких моделей в короткостроковій і довгостроковій перспективі.

Результати дослідження. Припустимо, що попит майбутнього року формується в поточному році. Тому, якщо мати достовірний прогноз про майбутній попит, то підприємці можуть спланувати виробництво під величину передбачуваного попиту. Введемо наступні позначення: t ($t = \overline{1, T}$) – номер року; Y_t – ВВП поточного року; C_t – споживчі витрати (складаються з витрат населення та урядових витрат); I_t – валові інвестиції; M_t – обсяг зовнішньої торгівлі (різниця між експортом та імпортом). Всі показники вимірюються в млрд. дол.

Описані змінні пов'язані рівністю:

$$Y_t = C_t + I_t + M_t. \quad (1)$$

Найбільший інтерес для нас представляє ВВП, тому в рівності (1) потрібно коректно оцінити показники C_t , I_t та M_t . Для цих цілей автор пропонує застосувати методи економетрії.

Отже передбачається, що споживання наступного року зв'язано лінійним економетричним рівнянням з ВВП поточного року:

$$C_{t+1}^p = a + b \cdot Y_t. \quad (2)$$

Далі будемо відштовхуватися від відомої моделі Самуельсона – Хікса [3], [4]. Однак додамо в неї дещо інший сенс. Припустимо, що інвестиції майбутнього року пов'язані регресійним рівнянням з приростом ВВП поточного року в порівнянні з минулим роком:

$$I_{t+1}^p = I + r(Y_t - Y_{t-1}). \quad (3)$$

Тут вибіркового коефіцієнта регресії r – це показник акселерації (прискорення). Вільний член I умовно назвемо «постійною складовою інвестицій».

Автор даного дослідження припустив наступне. Через те, що під показником r розуміють прискорення економічних процесів, то з масиву даних слід видаляти часові періоди, в які зміна ВВП була від'ємною або дорівнювала нулю. Будемо припускати, що обсяг зовнішньої торгівлі наступного року залежить лінійно від ВВП поточного року, тобто

$$M_{t+1}^p = p + q \cdot Y_t. \quad (4)$$

Продовжимо дослідження, розпочаті автором у його статті [5]. Підставимо складові ВВП з рівнянь (2), (3) та (4) у рівність (1). Перегрупуємо доданки і отримаємо модель макроекономічної динаміки з дискретним часом:

$$Y_{t+1}^p = (b + r + q) \cdot Y_t - r \cdot Y_{t-1} + (a + I + p). \quad (5)$$

Зауважимо, що рівняння (5) дозволяє прогнозувати ВВП держави, спираючись на відомості про ВВП за два попередні часових періоди.

В якості прикладу розглянемо основні макроекономічні дані Сінгапуру за 1991-2010 рр. (http://be5.biz/makroekonomika/profile/profile_singapore.html), тобто $t = \overline{1, 20}$.

За статистичними даними економіки Сінгапуру були отримані три економетричні моделі:

$$C_{t+1}^p = 4,4156 + 0,5157 \cdot Y_t;$$

$$I_{t+1}^p = 17,8114 + 1,1137 \cdot (Y_t - Y_{t-1});$$

$$M_{t+1}^p = -12,4005 + 0,3605 \cdot Y_t.$$

Параметри регресійних рівнянь оцінені методом найменших квадратів. Моделі та їх складові виявилися значущими за статистичними критеріями Фішера і Стюдента. Підсумкова модель (5) має вигляд:

$$Y_{t+1}^P = 1,9899 \cdot Y_t - 1,1136 \cdot Y_{t-1} + 9,8265. \quad (6)$$

Перевіримо якість прогнозу по даній моделі. Підставимо в рівняння значення ВВП за 2009 і 2010 рр., тобто $Y_{t-1} = 183$ і $Y_t = 223$. Отримаємо прогнозоване значення для ВВП Сінгапуру на 2011 р., а саме $Y_{t+1}^P = 249,775$ млрд. дол. У 2011 р. ВВП Сінгапуру склав 260 млрд. дол. Порівняємо фактичне значення $Y_{2011} = 260$ з прогнозним $Y_{2011}^P = 249,775$.

Абсолютне відхилення становить 10,225 млрд. дол., відносне відхилення становить 3,9327%. Отже, розбіжність складає близько 4%. Якість прогнозування за допомогою побудованої моделі можна визнати задовільною, як мінімум в короткостроковій перспективі.

Крім чисто практичних аспектів таких моделей, корисно розглянути їх теоретичні властивості. Запишемо загальну динамічну модель (5) у такому вигляді:

$$Y_{t+1}^P - (b+r+q) \cdot Y_t + r \cdot Y_{t-1} - (a+I+p) = 0. \quad (7)$$

З точки зору математики рівняння (7) – це неоднорідне кінцево-різницево рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Його розв'язок залежить від характеристичного рівняння:

$$I^2 - (b+r+q) \cdot I + r = 0. \quad (8)$$

Дискримінант квадратного рівняння (8) дорівнює:

$$D = (b+r+q)^2 - 4r^2. \quad (9)$$

В залежності від значення дискримінанта (9) ми можемо отримувати рішення рівняння (7) різного вигляду.

Розглянемо перший випадок $D > 0$, при якому рівняння (7) буде мати два різні дійсні корені I_1 та I_2 . Загальний розв'язок кінцево-різницевого рівняння (7) набуває вигляду

$$Y_{t+1}^P = C_1 \cdot e^{I_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{I_2 \cdot t} + A, \quad (10)$$

де C_1 та C_2 – константи, які залежать від початкових умов; A – постійна добавка, що виникає в силу неоднорідності рівняння (7).

Обговоримо рішення (10). Якщо постійні множники C_1 та C_2 є додатними, та хоча б один з коренів I_1 та I_2 є додатним, то функція (10) буде монотонно зростаючою (рис. 1). Це свідчить про те, що можна прогнозувати зростання ВВП в довгостроковій перспективі.

Таку національну економіку можна назвати економікою стійкого зростання. Економічна політика такої держави служить як ближнім задачам, так і дальнім стратегічним цілям. В якості прикладу можна привести національну економіку Китайської народної республіки.

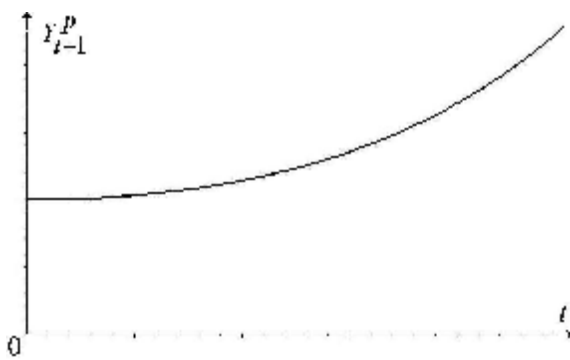


Рис. 1. Прогнозна траєкторія ВВП для економіки стійкого зростання

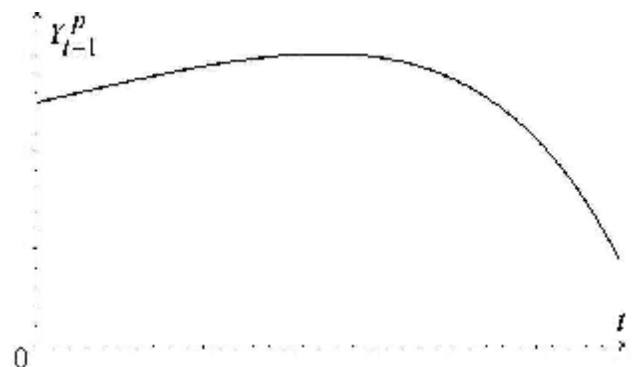


Рис. 2. Прогнозна траєкторія ВВП для «однобічних» економік

Нехай у рішенні (10) обидва кореня I_1 і I_2 додатні. При цьому більшому з них відповідає від'ємний постійний множник C . Тоді на початковому етапі спостерігається зростання ВВП, але далі йде падіння (рис. 2). Можна сказати, що така економічна політика дає близький тактичний виграв і довгостроковий стратегічний програш. Така ситуація властива для «однобічних» економік, у яких розвинена одна або декілька галузей промисловості. Відсутність диверсифікації приводить до того, що в кризовий період попит на продукцію цих галузей знижується. Цей факт, у свою чергу, впливає на ВВП всієї держави.

В якості прикладу можна привести Україну та її металургійну галузь. Здавалося, що експорт металургії здатний витягнути всю національну економіку. Досвідчені металурги, такі як Бойко В.С., радили правлячим колам розвивати внутрішній ринок споживання металу. Цей стратегічний шанс був втрачений. І тепер економіка України пожинає плоди від невірних рішень.

Інші композиції значень постійних множників C_1 та C_2 , коренів I_1 та I_2 призводять функцію (10) до монотонного спадання. Така ситуація характерна для країн з слабкими економіками.

Другим випадком буде $D = 0$, при якому характеристичне рівняння (8) матиме єдиний дійсний корінь I . Загальне рішення рівняння (7) набуває вигляду:

$$Y_{t+1}^P = e^{I \cdot t} (C_1 \cdot t + C_2) + A. \quad (11)$$

Ситуація, при якій $I > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ або $I > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 < 0$, робить графік функції (11) схожим на рис. 1. Якщо ж $I < 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ або $I > 0$, $C_1 < 0$, $C_2 < 0$, то прогнозне значення ВВП монотонно спадає. У випадку $I > 0$, $C_1 < 0$, $C_2 > 0$ маємо рис. 2.

Ситуація, при якій $I < 0$, $C_1 < 0$, $C_2 < 0$ або $I < 0$, $C_1 < 0$, $C_2 > 0$ або $I < 0$, $C_1 > 0$, $C_2 < 0$, має спільні риси. На початковому етапі ВВП незначно зростає чи спадає, а в наступні часові періоди його значення практично не змінюється. Це, швидше за все, означає, що національна економіка перебуває в стадії стагнації.

Цікавий третій (останній) випадок, коли $D < 0$. Характеристичне рівняння (8) матиме два комплексно спряжених кореня $I = a \pm i \cdot b$. Загальне рішення кінцево-різницевого рівняння (7) виглядає так:

$$Y_{t+1}^P = e^{a \cdot t} [C_1 \cdot \cos(b \cdot t) + C_2 \cdot \sin(b \cdot t)] + A. \quad (12)$$

Прогноз (12) має коливальний характер через наявність тригонометричних функцій. Тенденція зростання ВВП буде спостерігатися при додатних значеннях констант, які входять у функцію (12).

У даному дослідженні на основі статистичних даних економіки Сінгапуру була отримана динамічна модель (6). Дискримінант його характеристичного рівняння є від'ємним. Тому прогнозне значення ВВП буде описуватися рівнянням (12). Ілюстрацією може служити рис. 3. На ньому видно етап реформування економіки та подальше зростання ВВП.

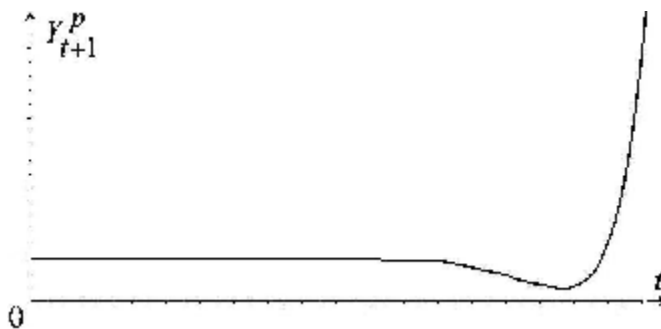


Рис. 3. Прогнозна траєкторія ВВП для вдало реформованих економік

Висновки та пропозиції. У даному дослідженні розглянуті проблеми динамічного моделювання показників національних економік. Розроблена модель дає можливість прогнозування макроекономічних індикаторів. Для отримання моделі застосована методика побудови кінцево-різницевого рівняння спільно з економетричними підходами. Прогнозні можливості моделі перевірені на реальних даних. Докладно обговорюються економічні та математичні аспекти таких моделей.

Список використаних джерел:

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория: Монография / [М. Интрилигатор]. – М.: Прогресс, 1975. – 606 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 565–586.
2. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов / [В.А. Колемаев]. – 3-е стереотип. изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 399 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 394–396. – ISBN 5-238-00794-9.
3. Samuelson P.A. A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule // American Economic Review, 55 (1965), 488-496.
4. Samuelson P.A. The Two-Part Golden Rule Deduced as the Asymptotic Turnpike of Catenary Motions // Western Economic Journal, 6 (1968), 85-89.
5. Полшков Ю.Н. Об одной модели макроэкономической динамики с дискретным временем // Проблемы развития внешнеэкономических связей и привлечения иностранных инвестиций: региональный аспект. Сборник научных трудов. – Донецк: ДонНУ. – 2013. – Т. 1. – С. 309-313.

Ключові слова: національна економіка, макроекономічні показники, динамічна модель, кінцево-різницева рівняння.

Ключевые слова: национальная экономика, макроекономические показатели, динамическая модель, конечно-разностное уравнение.

Key words: national economy, macroeconomic indicators, dynamic model, finite-difference equation.