ISSN 2225-6733

УДК 531.6

© Карпенко Т.Н.[1], Танасиенко П.С.[2], Федорова С.Р.[3]

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ

Авторами обобщен известный энергетический подход к решению проблем прочности при некоторых динамических нагрузках. В статье рассмотрен вопрос о прочностных расчетах динамических моделей с одной степенью свободы на основе закона сохранения механической энергии. Показана методика для получения формул кинетической энергии и потенциальной энергии деформаций упругих тел в зависимости от вида деформации и способов крепления объекта изучения. Это позволило найти приведенные коэффициенты массы и жесткости, а затем определить собственные частоты продольных, крутильных и изгибных колебаний. Предложен алгоритм действий для изучения собственных колебаний. Для часто встречающихся в технике ударных явлений, воспользовавшись законом сохранения механической энергии и количества движения, получены значения динамических коэффициентов и максимальных напряжений, возникающих при ударах, в том числе с учетом масс ударяемых тел.
Ключевые слова: *приведенная масса, приведенный коэффициент жесткости, собственная частота колебаний, динамический коэффициент, алгоритм, напряжения, деформация.*

Карпенко Т.М., Танасієнко П.С., Федорова С.Р. Енергетичний метод деяких динамічних міцнісних розрахунків. *Авторами узагальнено відомий енергетичний підхід до вирішення проблем міцності при деяких динамічних навантаженнях. У статті розглянуто питання щодо деяких міцнісних розрахунків динамічних моделей з одним ступенем свободи на основі закону збереження механічної енергії. Показана методика для отримання формул кінетичної енергії і потенційної енергії деформацій пружних тіл в залежності від виду деформації і способів кріплення об'єкта вивчення. Це дозволило знайти наведені коефіцієнти маси і жорсткості, а потім знайти власні частоти поздовжніх, крутильних і згинальних коливань. Запропоновано алгоритм дій для вивчення власних коливань. Для ударних явищ, що часто зустрічаються в техніці, скориставшись законом збереження механічної енергії і кількості руху, отримані значення динамічних коефіцієнтів і максимальних напружень, що виникають при ударах, в тому числі з урахуванням мас тіл, по яких ударяють.*
Ключові слова: *приведена маса, приведений коефіцієнт жорсткості, власна частота коливань, динамічний коефіцієнт, алгоритм, напруження, деформації.*

T.N. Karpenko, P.S. Tanasienko, S.R. Fedorova. Energy method of some dynamic strengh calculations. *The known energy method based on the law of mechanical energy conservation of the mechanical system with one degree of freedom is generalized in the article, that makes it possible to decide the questions of natural frequencies and dynamic coefficient at different types of deformations. Considering Hooke's law on dynamic loading true and deformations and tensions increase gradual, (having potential energies on a static loading), we consider impact potential energy equal to initial kinetic energy of the mechanical system. Dynamic coefficient at torsion, flexural and longitudinal impacts*

[1] *канд. физ.-мат. наук, доцент, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь,* taisktn2013@gmail.com
[2] *студент, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь,* allanprey@ gmail.com
[3] *студент, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь,* fSamira@mail.ru

has been got, and the literary source is indicated for the flexural impact in different points of a beam, taking into account the masses of the struck bodies. The obtained maximal stresses obtained at torsion and longitudinal impacts testify that in contrast to static stresses dynamic stresses at impact depend on the volume (but not on the area) of the struck body. Attention is drawn to the circumstance, that the dynamic coefficient at vibrations depends on natural frequency. Therefore the designers of machines must select inertness and other properties of the studied objects so that natural frequencies did not coincide with the shaft rotation frequencies and with the disturbance factors frequencies. Algorithm of calculations of dynamic–response factor at impact taking into account the struck body mass as well as algorithm of getting natural frequencies of longitudinal and torsion, flexural vibrations for some widespread calculation charts have been offered. The material of the article is taken from the known sources and generalized in a condensed form, (suitable for students and beginning designers) with the purpose of implementation of strength calculations of dynamic models with one degree of freedom.
Keywords: *mass, rigidity factor, natural frequency of vibrations, dynamic coefficient, algorithm, stress, deformation.*

Постановка проблемы. Анализ последних исследований и публикаций. Среди объектов, испытывающих динамические нагрузки, напряженно-деформированное состояние которых представляет практический интерес, особое место занимают узлы машин, в которых возникают колебательные процессы, а также детали машин под действием ударных нагрузок.

Поскольку частоты возмущающих факторов колеблющихся объектов известны, в распоряжении проектировщиков машин для обеспечения безрезонансных режимов работы остается важный вопрос определения собственных частот.

Детальные исследования колебательных процессов в машинах и изучения напряженно-деформированного состояния упругих объектов при действии на них ударных нагрузок отражены во многих литературных источниках [1-6] Однако для практического применения результатов этих исследований в инженерной практике отсутствует обобщенный алгоритм выполнения расчетов, отражающий методику построения динамических моделей и значимость энергетического подхода для определения собственных частот и коэффициента динамичности при ударе. Эту проблему предлагается решить с помощью известных приемов приведения масс и жесткостей упругих тел, а также законов сохранения механической энергии и импульсов (при ударе).

Цель статьи. В краткой форме обобщить энергетические методы вычисления коэффициентов динамичности при ударе и определения собственных частот продольных крутильных и изгибных колебаний некоторых распространенных в инженерной практике объектов.

Изложение основного материала. Если принять гипотезу, подкрепленную опытом [1], о том, что при динамическом действии нагрузок закон Гука остается в силе, тогда различие динамических и статических компонентов напряженно-деформированного состояния отражается так называемым динамическим коэффициентом, который равен:

$$K_{д} = \frac{\sigma_{дин}}{\sigma_{ст}} \text{ или } K_{д} = \frac{\tau_{дин}}{\tau_{ст}} \text{ или } K_{д} = \frac{\delta_{дин}}{\delta_{ст}}. \quad (1)$$

Как известно [2], в случае колебаний с амплитудой A и величиной статической деформации $\delta_{ст}$ динамический коэффициент равен:

$$K_{д} = 1 + \frac{A}{\delta_{ст}}. \quad (2)$$

В случае собственных колебаний амплитуда зависит не только от начальных условий, но и от собственной частоты. Поэтому актуальным является вопрос о величине этих частот при свободных и вынужденных колебаниях.

Если упругие тела изучаемой механической системы (МС) обладают значительной распределенной массой (а значит число степеней свободы велико), МС заменяют динамической моделью с одной степенью свободы. При этом в качестве обобщенной координаты выбирают деформацию сечения того тела, к которому приводят потенциальную и кинетическую энергии МС.

О потенциальной энергии. Упругую систему Н.М. Беляев [1] при статическом действии силы предлагает рассматривать как своеобразную машину, которая преобразует один вид потенциальной энергии в другой. Потенциальная энергия деформации тела равна работе внешних сил, которую они производят при этой деформации, и, согласно закону сохранения энергии, равна работе внутренних усилий, возникающих в теле. Для упругого элемента конструкции, следующего закону Гука, обобщенное перемещение прямо пропорционально обобщенной упругой силе Q, вызвавшей это перемещение. Поэтому потенциальная энергия деформации равна половине произведения обобщенной силы на перемещение, которое направлено вдоль силы:

$$\Pi = \frac{1}{2} Q \cdot q \,. \tag{3}$$

Потенциальную энергию можно также представить квадратичной функцией обобщенной силы или обобщенной координаты. При изучении удара координатой q будет координата, обозначающая сечение, по которому произведен удар. В случае колеблющихся МС координатой q будут: продольная координата, угол закручивания или прогиб балки, в зависимости от доминирующего, в смысле колебаний, упругого звена.

Рассмотрим, чему равны потенциальные энергии и коэффициенты жесткости однородного бруса длиной l при различных видах его деформации.

1. При деформации растяжения-сжатия жестко защемленного стержня обобщенная координата – удлинение Δl, обобщенная сила – продольное усилие N. Потенциальная энергия деформации равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} N \cdot \Delta l = \frac{\Delta l^2 \cdot ES}{2l} = \frac{N^2 l}{2ES} \,. \tag{4}$$

Коэффициент жесткости равен $c = \dfrac{ES}{l}$.

2. При деформации кручения жестко защемленного вала обобщенная координата – угол закручивания $\Delta\varphi$, обобщенная сила – крутящий момент $M_{кр}$. Потенциальная энергия деформации равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} M_{кр} \cdot \Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi^2 G I_p}{2l} = \frac{M_{кр}^2 l}{2 G I_p} \,. \tag{5}$$

Коэффициент жесткости равен $c = \dfrac{GI_p}{l}$.

3. При чистом изгибе шарнирно опертой по концам балки обобщенная координата – центральный угол изогнувшейся оси балки φ, обобщенная сила – изгибающий момент $M_{изг}$. Потенциальная энергия деформации равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} M_{изг} \cdot \varphi = \frac{\varphi^2 EI}{2l} = \frac{M_{изг}^2 l}{2EI} \,. \tag{6}$$

Коэффициент жесткости равен $c = \dfrac{EI}{l}$.

В случае поперечного плоского изгиба балки поперечная сила и изгибающий момент выполняют работу во взаимно перпендикулярных направлениях. Учитывая, что работа поперечной силы намного меньше работы изгибающего момента, первой работой пренебрегают. Для балки постоянного сечения потенциальная энергия деформаций вычисляется по формуле:

$$\Pi = \frac{1}{2EI} \int_0^l M_{изг}^2(x) dx \,. \tag{7}$$

Приближенная зависимость изгибающего момента от уравнения изогнутой оси балки $y(x)$ имеет вид $M_{изг} = EIy''(x)$, в которой уравнение $y(x)$ диктуется способом крепления и нагрузкой.

Формулы для потенциальной энергии изгибной деформации и коэффициентов жесткости для некоторых расчетных схем помещены в табл. 1, где жирной точкой A обозначена точка приложения сосредоточенной силы [2].

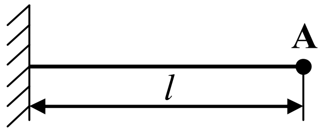
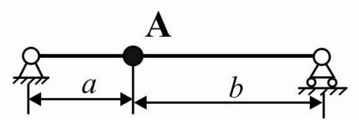
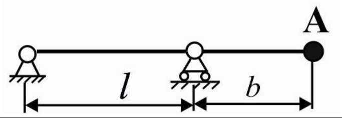
О кинетической энергии. Принимая гипотезу о том, что деформация объекта при динамической нагрузке изменяется по тому же закону, что и при статической, для построения динамической модели используют тезис о том, что кинетическая энергия исходной механической системы равна кинетической энергии динамической модели с одной степенью свободы, движу-

ВІСНИК ПРИАЗОВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
2017р. Серія: Технічні науки Вип. 35
ISSN 2225-6733

щейся со скоростью, равной производной от обобщенной координаты, т. е. $\dot{q}$.

Таблица 1

Потенциальная энергия изгибных деформаций

№ схемы	Расчетная схема	Потенциальная энергия	Коэффициент жесткости
1		$\Pi = \frac{3EI}{l^3} \cdot \frac{y^2}{2}$	$c = \frac{3EI}{l^3}$
2		$\Pi = \frac{3EI(a+b)}{a^2+b^2} \cdot \frac{y^2}{2}$	$c = \frac{3EI(a+b)}{a^2+b^2}$
3		$\Pi = \frac{3EI}{(b+l)b^2} \cdot \frac{y^2}{2}$	$c = \frac{3EI}{(b+l)b^2}$

Для реализации этого тезиса определяют кинетическую энергию элемента тела массой dm, а затем, интегрируя по объему тела, определяют кинетическую энергию всего тела. Для произвольного сечения тела принимают закон изменения его деформаций, связав его затем с обобщенной координатой. Например, для расчетной схемы 2 табл. 1 (где $a = b$) прогиб произвольного сечения балки массой dm выражается через обобщенную координату z формулой:

$$y = \frac{z}{l^3}(3l^2 x - 4x^3)\,, \tag{8}$$

где z – перемещение среднего сечения балки.

Подставив скорость $\dot{y}$ в формулу (9)

$$dT = \frac{1}{2}\dot{y}^2 dm\,, \tag{9}$$

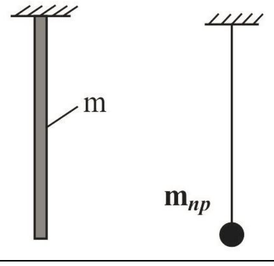
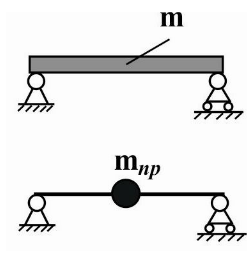
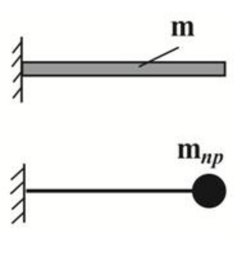
а затем, интегрируя, находят кинетическую энергию всей балки массой m, которая равна

$$T = \frac{17}{35} m \frac{\dot{z}^2}{2}\,. \tag{10}$$

В табл. 2 представлены результаты приведения масс некоторых тел. В результате имеем значения приведенных масс, которые вычисляются по формуле $m_{пр} = \beta \cdot m$. Для других обобщенных координат, определяемых отношением $\frac{a}{a+b}$ расчетной схемы 2, табл. 1, представлены значения коэффициентов приведения масс β в литературном источнике [5].

Таблица 2

Результаты приведения масс

№ схемы	1	2	3
Расчетная схема			
Коэффициент β	$\beta = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{17}{35}$	$\beta = \frac{33}{140}$

Для динамических крутильных моделей осевые моменты инерции масс участков валов, находящихся между сосредоточенными массами, прибавляют к моментам инерции сосредоточенных масс с коэффициентами $\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{6}$, в зависимости от соотношения величин этих масс [6].

Таким образом, для выполнения прочностных динамических расчетов с помощью закона сохранения энергии изучаемый объект заменяется динамической моделью с одной степенью свободы, считая справедливыми закон Гука и тезисы о потенциальной и кинетической энергиях. При этом имеют место формулы:

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2, \tag{11}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} cq^2, \tag{12}$$

где a – приведенный коэффициент инертности; это масса, если обобщенная координата – линейная, и осевой момент инерции, если обобщенная координата – угол закручивания; c – приведенный коэффициент жесткости, который диктуется свойствами материала *(E, G)*, формой, размерами (l, I_p, I), видом деформации, способом крепления объекта.

Определение собственных частот. Для составления дифференциального уравнения движения и определения собственной частоты ДМ с одной степенью свободы применим закон сохранения механической энергии, используя формулы (11) и (12), введя постоянную h:

$$\frac{1}{2} a\dot{q}^2 + \frac{1}{2} cq^2 = \frac{1}{2} h^2. \tag{13}$$

Продифференцировав (13) по времени, имеем дифференциальное уравнение движения:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \tag{14}$$

где k^2 – квадрат собственной частоты, который равен

$$k^2 = \frac{c}{a}. \tag{15}$$

При изучении собственных колебаний МС с целью определения собственной частоты предлагается следующий алгоритм:

1) выбрать обобщенную координату q, соответствующую виду деформации доминирующего, в смысле колебаний, звена;

2) определив потенциальную энергию упругих деформаций, отсчитываемую от положения статического равновесия, найти приведенный коэффициент жесткости c;

3) введя предположение о том, что динамические деформации подчиняются тому же закону, который имел место при статической нагрузке, найти кинетическую энергию элемента массы, а затем, интегрируя по объему тела, определить кинетическую энергию ДМ и найти коэффициент инерции a;

4) определить квадрат собственной частоты по формуле (15).

Предложенный Рэлеем [2] энергетический метод определения собственных частот поперечных колебаний балок переменных сечений основан также на законе сохранения энергии. Максимальное значение потенциальной энергии, которое достигается в момент наибольшего отклонения МС от положения равновесия, приравнивается к максимальной кинетической энергии, которая достигается в момент прохождения МС через положение равновесия.

Считая, что перемещения всех точек оси балки происходят с одной и той же частотой и находятся в одной фазе, уравнение изогнутой оси задается формулой $y = f(x)\cdot\sin(kt+\delta)$, где $f(x) = y_{\max}$. Тогда собственная частота изгибных колебаний равна:

$$k = \sqrt{\frac{\int_0^l (f''(x))^2 EIdx}{\int_0^l m(x) f(x) dx}}. \tag{16}$$

<u>Примеры.</u>

1. В случае крутильных колебаний защемленного одним концом невесомого вала

длиной l, несущего на другом конце маховик с моментом инерции $I_м$, учитывая значения коэффициентов a и c, собственная частота равна:

$$k = \sqrt{\frac{GI_p}{l \cdot I_M}}. \tag{17}$$

2. Для расчетной схемы 1 табл. 2 с грузом P на конце при продольных колебаниях стержня массой m собственная частота равна:

$$k = \sqrt{\frac{3ES \cdot g}{l(3P + mg)}}. \tag{18}$$

3. При изгибных колебаниях шарнирно опертой балки массой m (расчетные схемы 2 табл. 1 и 2, где a=b) с грузом P посередине собственная частота равна:

$$k = \sqrt{\frac{48EI \cdot g}{l^3(P + \frac{17}{35}mg)}}. \tag{19}$$

4. При изгибных колебаниях консольной балки массой m (расчетная схема 3 табл. 2) с грузом P на свободном конце собственная частота равна:

$$k = \sqrt{\frac{3EI \cdot g}{l^3(P + \frac{33}{140}mg)}}. \tag{20}$$

Две последние формулы являются приближенными, так как массы балок не учитывались в уравнениях изогнутой оси.

Определение динамического коэффициента при ударе. При ударе двух тел неизвестны ускорения точек тел, поэтому использование сил инерции для составления динамических уравнений движения не представляется возможным. Закон сохранения механической энергии за время удара, если считать справедливым закон Гука, позволяет получить динамический коэффициент и максимальные напряжения в ударяемом, а иногда в ударяющем теле. Начальная кинетическая энергия ударяющего тела T_0 равна потенциальной энергии деформации $П_д$.

$$T_0 = П_д. \tag{21}$$

Считая справедливой гипотезу о постепенном росте деформаций и напряжений, принимаем, что формулы потенциальной энергии при ударе $П_д$ имеют тот же вид, что и при статическом нагружении [1]. В результате, после некоторых математических преобразований, имеем значение коэффициента динамичности:

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{П_c(1+\alpha)}}, \tag{22}$$

где $П_c$ – значение потенциальной энергии при статическом нагружении, зависящее от вида деформации и расчетной схемы; коэффициент α равен отношению приведенной к сечению удара массы ударяемого тела к массе ударяющего тела и учитывает значение коэффициента β и место приложения ударной нагрузки.

Алгоритм расчета при ударных нагрузках сводится к следующему:

1) определить кинетическую энергию T_0 ударяющего тела;
2) выразить потенциальную энергию деформации $П_д$ через обобщенную силу удара или через напряжения, или через деформацию;
3) приравнивая энергии, найти динамический коэффициент.

При определении динамического коэффициента с учетом массы тела, подверженного удару, в законе сохранения энергии учитывают кинетическую энергию тел, движущихся с общей скоростью v_1 после удара, которую находят из закона сохранения количества движения МС за время удара [5]:

$$v_1 = v_0 \frac{P}{P + \beta_1 G}, \tag{23}$$

где v_0 – начальная скорость ударяющего тела весом P; β_1 – коэффициент приведения массы ударяемого тела весом G по количеству движения.

После некоторых математических преобразований закона сохранения энергии за время удара имеем уточненный динамический коэффициент:

$$K_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g \cdot \delta_{cm}} \cdot \frac{(1+\beta \cdot \alpha)}{(1+\beta_1 \cdot \alpha)^2}}, \tag{24}$$

где β – коэффициент приведения массы по кинетической энергии (например, табл. 2).

Чтобы найти коэффициент β_1, считаем, что скорости отдельных точек ударяемого тела пропорциональны перемещениям. Количество движения ударяемого тела с объемом V равно

$$\frac{\beta_1 G}{g} v_1 = \int\limits_{(V)} \frac{dG}{g} v_x, \tag{25}$$

откуда коэффициент β_1 равен

$$\beta_1 = \frac{1}{G} \int\limits_{(V)} \frac{v_x}{v_1} dG = \frac{1}{G} \int\limits_{(V)} \frac{\delta_x}{\delta_{cm}} dG. \tag{26}$$

Отношение перемещения в произвольном сечении x, δ_x, к перемещению δ_{cm}, которое соответствует статическому приложению силы P, определяется в зависимости от расчетной схемы.

Пример 1. Определить максимальные напряжения, возникающие при скручивающем ударе участка вала длиной l в результате внезапной остановки по причине «заедания» в подшипнике, ближайшем к маховику, находящемуся на конце участка.

Кинетическая энергия маховика с моментом инерции $I_м$, вращающегося с угловой скоростью ω, превращается в потенциальную энергию кручения вала, т. е., согласно (5) и (21), имеем

$$\frac{1}{2} I_м \omega^2 = \frac{M_{кр}^2 l}{2GI_p}. \tag{27}$$

Выразив крутящий момент $M_{кр}$ через касательные напряжения, имеем для круглого сечения S максимальное значение касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \omega \sqrt{\frac{2I_м G}{Sl}}. \tag{28}$$

Пример 2. Определить максимальные напряжения, возникающие в стержне длиной l, который ударяется об абсолютно твердую поверхность.

Потенциальная энергия продольных деформаций элемента сечением S, длиной dx, согласно (4) и закону Гука, равна

$$d\Pi = \frac{\sigma_x^2 S}{2E} dx. \tag{29}$$

Считая, что максимальное напряжение σ_{max} возникает в нижнем сечении стержня, а напряжения, возникающие в сечении, отстоящем на расстоянии x от верхнего конца стержня, равны $\sigma_x = \sigma_{\max} \frac{x}{l}$, проинтегрировав (29) по длине, получим потенциальную энергию деформаций всего стержня. Согласно формуле (21), имеем:

$$\sigma_{max} = \sqrt{\frac{6ET_0}{Sl}}. \tag{30}$$

Пример 3. Определить динамический коэффициент при кантовке металлического слитка весом P, центр тяжести которого опускается с высоты h на ролик рабочего рольганга весом G. Считаем, что удар происходит посредине ролика. Ролик представим балкой длиной l, шарнирно опертой по краям, расчетные схемы 2 табл. 1 и 2. В формуле (24) коэффициент $\beta = \frac{17}{35}$. Коэффициент β_1 определим по формуле (26), где $\delta_{cm} = \frac{Pl^3}{48EI}$ [1]. Отношение $\frac{\delta_x}{\delta_{cm}} = \frac{1}{l^3}(3l^2 x - 4x^3)$, согласно формуле (8), где $z = \delta_{cm}$. Интегрируя по длине ролика, получим $\beta_1 = \frac{5}{8}$ [5]. Поэтому динамический коэффициент равен:

$$k=\sqrt{1+\frac{96hEI(1+\frac{17}{35}\alpha)}{Pl^3(1+\frac{5}{8}\alpha)^2}}\,. \tag{31}$$

Как показывают расчеты, для роликов рабочих рольгангов $K_д = 25 \div 30$ [7]. Отсюда следует, что динамическое усилие на ролик в 25-30 раз больше веса падающего слитка.

Выводы

Применение закона сохранения механической энергии для механических систем, подверженных удару или совершающих колебания, позволяет определить коэффициенты динамичности и собственные частоты с учетом масс упругих тел.

Предложен алгоритм по определению собственных частот продольных, крутильных и изгибных колебаний, который реализован на примерах.

Методика определения динамических коэффициентов при ударе учитывает соотношение масс ударяемого и ударяющего тел.

Приведенные примеры позволяют сделать выводы об оптимальном сочетании характеристик инертности и упругих свойств, которые гарантируют прочность вращающихся валов, балок, несущих несбалансированный ротор и некоторых тел при ударных нагрузках.

Список использованных источников:

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов : учебник для втузов / Н.М. Беляев. – 13-е изд. – М. : Физматгиз, 1962. – 856 с.
2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М. : Высшая школа, 1967. – 432 с.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М. : Физматгиз, 1960. – 380 с.
4. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями / С.Н. Кожевников. – К. : Изд. АН УССР, 1961. – 160 с.
5. Панарин Н.Я. Сопротивление материалов / Н.Я. Панарин, И.И. Тарасенко. – Л.; М. : Госстройиздат, 1962. – 528 с.
6. Ривин Е.И. Динамика привода станков / Е.И. Ривин. – М. : Машиностроение, 1966. – 204 с.
7. Королев А.А. Конструкция и расчет машин и механизмов прокатных станов / А.А. Королев. – М. : Металлургия, 1985. – 376 с.

References:

1. Beljaev N.M. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 856 p. (Rus.)
2. Panovko Ja.G. *Osnovy prikladnoj teorii uprugih kolebanij* [Fundamentals of the applied theory of elastic oscillations]. Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1967. 432 p. (Rus.)
3. Timoshenko S.P. *Kolebanija v inzhenernom dele* [Fluctuations in Engineering]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 380 p. (Rus.)
4. Kozhevnikov S.N. *Dinamika mashin s uprugimi zven'jami* [Dynamics of machines with elastic links]. Kiev, AN USSR Publ., 1961. 160 p. (Rus.)
5. Panarin N.Ja., Tarasenko I.I. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Leningrad, Moscow, Gosstrojizdat Publ., 1962. 528 p. (Rus.)
6. Rivin E.I. *Dinamika privoda stankov* [Dynamics of the machine tool drive]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1966. 204 p. (Rus.)
7. Korolev A.A. *Konstrukcija i raschet mashin i mehanizmov prokatnyh stanov* [Construction and calculation of machines and mechanisms of rolling mills]. Moscow, Metallurgija Publ., 1985. 376 p. (Rus.)

Рецензент: А.А. Ищенко
д-р техн. наук, проф., ГВУЗ «ПГТУ»

Статья поступила 25.10.2017