

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

УДК 621.86.065

doi: 10.31498/2225-6733.41.2020.226121

© Карпенко Т.М.¹, Музика І.М.²

ДО ПИТАННЯ ПРО ВЛАСНІ ЧАСТОТИ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ «БАЛКА-ДВИГУН»

У статті розглянуті задачі по визначенню уточнених значень частот власних згинальних коливань балок для поширених в інженерній практиці розрахункових схем. Об'єкт вивчення – пружна балка і розташований на ній двигун з неврівноваженою ексцентрично насадженою масою. Дослідження виконувалися з метою отримання достатнього коефіцієнта динамічності і уточненого формулювання умови міцності балки. Для визначення власної частоти з врахуванням маси балки побудована динамічна модель об'єкта з приведеною масою, розташованою в перерізі балки, через яке проходить сила тягіння двигуна. Запропоновано методу визначення коефіцієнта зведення маси, зведеного коефіцієнта згинальної жорсткості балки, власної частоти коливань. Для цього використовується рівняння зігнутої осі балки, з огляду на зміну координати точки зведення. Визначено основну частоту коливань системи з врахуванням осьового моменту інерції маси двигуна щодо його центральної осі. Рішення рівняння частот для малого відношення радіуса інерції двигуна до довжини балки дозволяє отримати суттєву поправку до частоти, яка мала б місце для точкової маси двигуна. Виходячи з умов міцності балки при відсутності демпфера, отримані рекомендації щодо безпечної швидкості обертання ротора в дорезонансній і післярезонансній фазах руху об'єкта. Маючи уточнене амплітудне значення напружень, з врахуванням заданих параметрів балки і двигуна, рекомендовано підібрати характеристику демпфера в'язкого тертя, яка забезпечить заданий коефіцієнт витривалості при несиметричному циклі зміни напружень. Результати статті можуть бути використані студентами та інженерами для підбору оптимального, з точки зору міцності балки, поєднання параметрів балки і двигуна.

Ключові слова: вимушені коливання, власна частота, коефіцієнт динамічності, резонанс.

T.M. Karpenko, I.M. Muzyka. On the question of natural frequencies of transverse vibrations of the «beam-engine» system. The article deals with the tasks of determining the refined values of the frequencies of natural bending vibrations of beams for the design schemes common in engineering practice. The object of study is an elastic beam and an engine located on it with an unbalanced eccentrically mounted mass. The studies were carried out with the aim of obtaining a sufficient dynamism coefficient and a refined formulation of the beam strength condition. To determine the natural frequency, taking into account the mass of the beam, a dynamic model of an object with a reduced mass has been built, located in the beam section through which the gravity force of the engine passes. A method for determining: the coefficient of mass reduction, the reduced coefficient of bending stiffness of the beam, the natural vibration frequency has been proposed. To do this, the equation for the curved beam axis is used, taking into account the change in the coordinate of the mass focusing point. The basic vibration frequency of the system has been determined taking into account the axial moment of inertia of the engine mass

¹ канд. фіз.-мат. наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь, karpenko_t_n@pstu.edu

² ст. викладач, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь, muzyka_i_n@pstu.edu

relative to its central axis. The solution of the frequency equation for a small ratio of the radius of the motor inertia to the length of the beam makes it possible to obtain a significant correction to the frequency that would take place for a point mass of the motor. Based on the strength conditions of the beam in the absence of a damper, recommendations have been obtained regarding the rotor rotation safe speed in the pre-resonant and post-resonant phases of the object motion. Having the refined amplitude value of stresses, taking into account the given parameters of the beam and the engine, it is recommended to select the characteristic of the viscous friction damper, which will provide a given endurance coefficient with an asymmetric cycle of stress change. The results of the article can be used by both students and engineers to select the optimal, in terms of beam strength, combination of beam and engine parameters.

Keywords: forced vibrations, natural frequency, dynamic factor, resonance.

Постановка проблеми. Серед об'єктів, напружено-деформований стан яких представляє інтерес, важливе місце займають балки, на яких встановлені машини з незбалансованою масою, що обертається. Підбір поєднання параметрів, які забезпечать міцність балки при безрезонансному режимі коливань, є актуальною задачею. Розрахунки на міцність зводяться до визначення коефіцієнта динамічності, величина якого залежить від власної основної частоти коливань системи. Чим точніше буде знайдена ця частота, тим достовірніше буде розрахунок балки на міцність.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанням визначення власних частот балок присвячений цілий ряд класичних робіт [1, 2] та ін. В роботі [3] запропонована методика визначення спектра власних частот згинальних коливань двоопорної балки, навантаженої розподіленим навантаженням. Аналітичні вирази для визначення власних частот, отриманих в роботі [4], дозволяють прогнозувати зміни власних частот в залежності від параметрів балок. Експериментально і теоретично розраховані власні частоти коливань асфальтобетонних балок в роботі [5].

Мета статті – для часто використовуваних розрахункових схем системи «балка–двигун»: виконати розрахунки власних частот згинальних коливань балки з урахуванням її маси, осьового моменту інерції маси двигуна і місця розташування двигуна на балці; рекомендувати, з точки зору міцності балки, безпечні кутові швидкості обертання валу двигуна.

Виклад основного матеріалу. Пружна балка маси $m_б$, на якій розташований двигун маси $m_д$, з неврівноваженою масою $m_{ек}$, ексцентриситет якого дорівнює e , здійснює поперечні вимушені коливання з частотою обертання валу двигуна ω під дією збурюючої сили $F = H \cdot \sin \omega t$, де $H = m_{ек} \omega^2 e$. Умова міцності об'єкта вивчення виражається формулою

$$K_o \cdot \sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (1)$$

Коефіцієнт динамічності, згідно [6], дорівнює

$$K_o = 1 + \frac{\delta_H}{\delta_{ст}} \cdot \lambda, \quad (2)$$

де δ_H , $\delta_{ст}$ – деформація балки під дією сили H і сили $Q = mg$, відповідно; $m = m_д$, якщо масою балки нехтують; $m = m_д + \beta \cdot m_б$, β – коефіцієнт зведення маси балки; λ – коефіцієнт наростання коливань, що дорівнює:

– без врахування сил опору

$$\lambda = \frac{1}{|k^2 - \omega^2|}; \quad (3)$$

– з врахуванням сили лінійного опору, яка характеризується коефіцієнтом α

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha \cdot \omega}{m \cdot k^2}\right)^2}}, \quad (4)$$

де k – основна частота власних коливань, яка дорівнює

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (5)$$

де c – коефіцієнт згинальної жорсткості балки.

При виконанні наближених розрахунків частоту k найчастіше визначають без врахування маси балки і осьового моменту інерції маси двигуна.

Розглянемо приклад визначення власної частоти коливань з врахуванням маси балки, якщо змінювати положення точки зведення маси.

Балку, яка коливається, довжиною l , з рівномірно розподіленою масою, замінюють точковою масою, яка розташовується в перерізі $x = x_0$, через який проходить сила ваги двигуна. Ця маса має таку ж кінетичну енергію, як і вся балка. При цьому вводиться припущення про те, що для динамічних прогинів балки виконується закон Гука, а швидкості прямо пропорційні динамічним деформаціям. Маємо формулу для визначення коефіцієнта β згідно [6]

$$\beta = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{y(x)}{\delta_{ст}} \right)^2 dx, \quad (6)$$

де $y(x)$ – рівняння зігнутої осі балки під дією зосередженої сили \bar{Q} .

Для визначення уточненої власної частоти пропонується наступний алгоритм.

1. Записати формулу згинального моменту $M(x)$, що виник під дією сили \bar{Q} , яка прикладена в точці зведення.

2. Інтегрувати диференціальне рівняння

$$E \cdot I \cdot y''(x) = M(x) \quad (7)$$

з врахуванням умов обпирання балки і отримати рівняння $y(x)$.

3. Визначити значення $\delta_{ст}$, β і зведений коефіцієнт згинальної жорсткості балки за формулою

$$c = \frac{Q}{\delta_{ст}}. \quad (8)$$

Значення частоти k визначаємо за формулою (5).

Приклад 1. Для розрахункової схеми, зображеної на рис. 1, визначити як змінюється власна частота коливань об'єкта в залежності від положення двигуна на балці з врахуванням маси балки. Вихідні дані: $E, I_z, l, m_6, m_d, 0 \leq x_0 \leq 0,5l$.

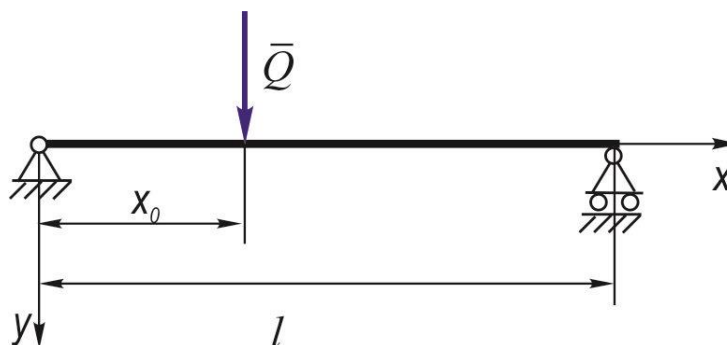


Рис. 1 – Розрахункова схема 1

Маючи залежність $M(x)$, інтегруємо рівняння (7) з врахуванням умов обпирання балки і отримаємо рівняння зігнутої осі

$$y(x) = \frac{Q}{6E \cdot I} (1 - \gamma) \cdot (x^3 + 2\gamma x l^2 + \gamma^2 x l^2), \text{ де } \gamma = \frac{x_0}{l}.$$

Коефіцієнт згинальної жорсткості, зведений до координати x_0 , дорівнює $c = \frac{3E \cdot I}{l^3} \bar{c}$, де $\bar{c} = \frac{1}{\gamma^2(1-\gamma)^2}$.

Залежність коефіцієнту зведення маси β від параметру γ визначимо за формулою (6). Тоді власна частота коливань дорівнює $k = \sqrt{\frac{3E \cdot I_z}{l^3(m_d + \beta m_6)}} \cdot \bar{k}$, де $\bar{k} = \sqrt{\frac{\bar{c}}{\beta}}$.

Результати чисельного аналізу поміщені в таблиці.

Таблиця

Значення коефіцієнтів β, \bar{c}, \bar{k}					
$\gamma = \frac{x_0}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
β	2,86	1,01	0,84	0,52	0,48
\bar{c}	123,45	39,06	22,67	17,36	16,00
\bar{k}	6,56	6,21	5,94	5,78	5,74

Оскільки для безрезонансного режиму коливань об'єкта має виконуватися нерівність $0,8 < \frac{\omega}{k} < 1,2$, виходячи з результатів вище наведених досліджень, робимо висновок про місце розміщення двигуна на балці.

Застосовуючи запропоновану методику, можна знайти коефіцієнти зведення мас для інших розрахункових схем. Наприклад, для консолі маємо:

$$\beta = \frac{1}{140}(63\gamma^5 - 35\gamma^6 + 5\gamma^2), \quad k = \sqrt{\frac{3E \cdot I_z}{l^3(m_d + \beta m_6)}}.$$

Приклад 2. Для розрахункової схеми, зображеної на рис. 2, встановимо, яка похибка допускається при визначенні основної власної частоти коливань об'єкта, якщо не враховується момент інерції маси двигуна.

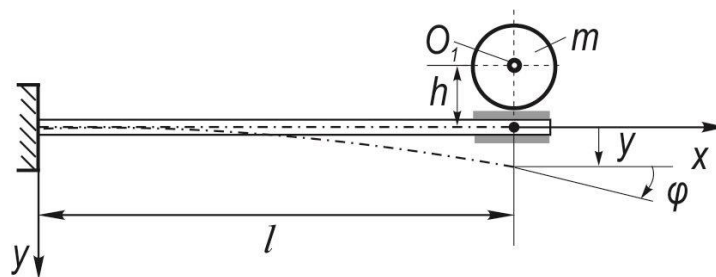


Рис. 2 – Розрахункова схема 2

Вихідні дані: балки E, I_z, l ; двигуна m, I_{O_1}, h .

Мета задачі: визначити уточнене значення власної частоти, якщо врахувати момент інерції маси двигуна щодо осі O_1z .

Визначимо радіус інерції i маси двигуна щодо осі, яка знаходиться на відстані h від центральної осі O_1z : $i = \sqrt{\frac{I}{m}}$, де $I = I_{O_1} + mh^2$.

Рух системи, що вивчається, можна описати двома координатами згідно [1]: y – вертикальне переміщення вільного кінця балки, φ – кут обертання балки.

Склавши диференціальні рівняння руху методом сил і прийнявши розв’язок цих рівнянь у вигляді $y = A_1 \sin kt$, $\varphi = A_2 \sin kt$, маємо рівняння частот

$$(m \cdot \delta_{11} \cdot k^2 - 1)(I \cdot \delta_{22} \cdot k^2 - 1) - m \cdot I \cdot \delta_{12}^2 \cdot k^4 = 0,$$

де коефіцієнти впливу дорівнюють $\delta_{11} = \frac{l^3}{3E \cdot I_z}$, $\delta_{12} = \frac{l^2}{2E \cdot I_z}$, $\delta_{22} = \frac{l}{E \cdot I_z}$.

Розв’язуючи рівняння частот, враховуючи, що відношення i до l мале, отримано наближене значення квадрата меншої частоти згідно [1]: $k_1^2 = \frac{3E \cdot I_z}{ml^3} - \frac{9E \cdot I_z}{ml^3} \cdot \frac{i^2}{l^2}$.

Тому поправка до основної частоти дорівнює $\Delta k_1 = \frac{3i}{l} \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{ml^3}}$.

Чисельний аналіз задачі виконаємо для наступних початкових даних.

Двигун МТН613, маса $m = 1100 \text{ кг}$, $i = 0,159 \text{ м}$, $\omega = 100,48 \text{ с}^{-1}$.

Балка виконана з двотавра №30а, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $I_z = 8,95 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$, $l = 1,5 \text{ м}$.

Результати обчислення наступні:

– без врахування $I - k_{\text{наближене}} = 123 \text{ с}^{-1}$;

– з врахуванням $I - k_{\text{уточнене}} = 100,6 \text{ с}^{-1}$.

Тобто маємо явище резонансу, якщо враховувати момент інерції двигуна I ; та маємо до-резонансний режим для коефіцієнту розладу $\frac{\omega}{k} = 0,81$, якщо I не враховувати.

Чому це важливо знати власні частоти коливань системи «балка–двигун».

1. Маючи уточнені значення власних частот коливань об’єкта «балка–двигун», при заданих початкових параметрах можна підібрати демпфер в’язкого тертя, що задовольняє коефіцієнту запасу витривалості n . Це можливо тому, що коефіцієнт n при несиметричному циклі змін напружень містить амплітудне значення напруження σ_a , в якому є одна невідома α – коефіцієнт сили лінійного опору демпфера. Згідно [7] σ_a дорівнює:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha \omega}{mk^2}\right)^2}}.$$

2. Виходячи з умов міцності балки, що здійснює разом з двигуном вимушені коливання, можна відповісти на питання: яким нерівностям в дорезонансному і післярезонансному режимах повинна задовольняти безпечна кутова швидкість обертання валу двигуна $\omega_{\text{безп.}}$.

Перепишемо умову міцності (1) з врахуванням значення коефіцієнта λ в разі відсутності демпфера

$$1 + \frac{m_{\text{ек}} \cdot e \cdot \omega^2}{G} \cdot \frac{k^2}{|k^2 - \omega^2|} \leq \frac{[\sigma]}{\sigma_{\text{max}}}.$$

Тут G – вага двигуна. Ввівши позначення $\chi = \frac{m_{\text{ек}} \cdot l}{G}$, $\psi = \frac{[\sigma]}{\sigma_{\text{max}}} - 1$, отримаємо нерівності

для безпечних значень ω :

$$\begin{aligned} \text{– для } \omega < k \quad \omega &\leq \sqrt{\frac{\psi}{\chi + \frac{\psi}{k^2}}}; \\ \text{– для } \omega > k \quad \omega &\geq \sqrt{\frac{\psi}{\chi - \frac{\psi}{k^2}}}. \end{aligned}$$

Висновки

1. Результати проведених в статті досліджень дозволяють знаходити уточнені значення власних частот коливань системи «балка–двигун».

2. Маючи ці частоти, конструктора та експлуатаційники об'єкту, можуть підібрати раціональне поєднання параметрів системи при виконанні умов міцності балки з метою віддалення від резонансу.

Перелік використаних джерел:

1. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М. : Высшая школа, 1967. – 316 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М. : Физматгиз, 1960. – 380 с.
3. Гордон В.А. Собственные частоты и формы изгибных колебаний балки с трещиной / В.А. Гордон, Э.А. Кравцова // Вестник МГСУ. – № 3. – 2014. – С. 50-56.
4. Гаврилов А.А. Методика расчета собственных частот кран балок и их элементов / А.А. Гаврилов, Н.В. Морозов, Ю.Л. Власов // Вестник Оренбургского государственного университета. – № 1 (176). – 2015. – С. 212-217.
5. Маляр В.В. Определение частот собственных колебаний асфальтобетонных балок, испытываемых на вибростенде ХНАДУ / В.В. Маляр // Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету. – Вып. 64. – 2014. – С. 130-133.
6. Беляев Н.М. Сопrotivление материалов / Н.М. Беляев. – М. : ГИ Ф.-М.Л., 1962. – 856 с.
7. Йосилевич Г.Б. Прикладная механика: для студентов ВУЗов / Г.Б. Йосилевич, П.А. Лебедев, В.С. Стреляев. – М. : Машиностроение, 1985. – 576 с.

References:

1. Panovko Ya.G. *Osnovy prikladnoi teorii uprugih kolebaniy* [Fundamentals of the applied theory of elastic vibrations]. Moscow, Higher school Publ., 1967. 316 p. (Rus.)
2. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v ingenernom dele* [Oscillations in engineering]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 380 p. (Rus.)
3. Gordon V.A. *Sobstvennye chastoty i formy izgibnyh kolebaniy balki s treshchinoy* [Natural frequencies and forms of flexural vibrations of a beam with a crack]. *Vestnik MGSU – Vestnik MGSU*, 2014, no. 3, pp. 50-56. (Rus.)
4. Gavrilov A.A. *Metodika rascheta sobstvennyh chastot kran balok i ih elementov* [Methodology for calculating natural frequencies of crane beams and their elements]. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta – Vestnik of the Orenburg State University*, 2015, no. 1 (176), pp. 212-217. (Rus.)
5. Malyar V.V. *Opređenje chastot sobstvennyh kolebaniy asfaltobetonnyh balok, ispytyvaemyh na vibrostende KhNADU* [Determination of natural vibration frequencies of asphalt concrete beams tested on a vibration stand KhNADU]. *Visnik Kharkivs'kogo natsional'nogo avtomobil'no-dorozhn'ogo universitetu – Bulletin of Kharkov National Automobile and Highway University*, 2014, iss. 64, pp. 130-133. (Rus.)
6. Belyaev N.M. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, GI F.-M.L. Publ., 1962. 856 p. (Rus.)
7. Yosilevich G.B. *Prikladnaya mehanika: Dlya studentov vuzov* [Applied mechanics: For university students]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 576 p. (Rus.)

Рецензент: А.О. Іщенко
д-р техн. наук, проф., ДВНЗ «ПДТУ»

Стаття надійшла 15.09.2020