

131 ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

УДК 621.9.048.3

doi: 10.31498/2225-6733.48.2024.310671

© Карпенко Т.М.¹, Шишкін В.В.²**ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ
КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ У МЕТАЛОРІЗАЛЬНИХ ВЕРСТАТАХ**

Вимушені крутильні коливання у приводах верстатів – одна з актуальних проблем сучасного верстатобудування. Причинами цих коливань можуть бути: дисбаланси мас, які обертаються; конструктивна недосконалість підшипникових вузлів; особливості експлуатації або технологічного процесу (для металорізальних верстатів – ексцентричне закріплення заготовки, обробка некруглої деталі та ін.). В роботі на прикладі реального металорізального верстату реалізована задача динамічного аналізу приводу головного руху верстату з визначенням власних частот крутильних коливань. Реальний об'єкт замінено динамічною моделлю (ДМ). При побудові ДМ інерційні та пружні характеристики визначені з умов: – кінетична енергія об'єкту еквівалентна кінетичній енергії ДМ (з цієї умови отримані осьові моменти інерції зосереджених мас рядної моделі); – потенціальна енергія пружних деформацій об'єкту еквівалентна потенціальній енергії деформації ДМ (з цієї умови отримані коефіцієнти жорсткості ДМ). Власні частоти рядної ДМ визначались трьома способами: 1) шляхом розв'язування рівняння частот (точний метод) у поєднанні з методом зменшення кількості мас А.П. Черевкова; 2) через спрощення ДМ за методом парціальних систем; 3) методом залишків (Толле). Зроблено такі висновки: 1) основну (меншу) частоту можна знаходити будь-яким із розглянутих методів (бо результати трьох методів співпали); 2) при спрощенні ДМ з використанням методу парціальних систем слід враховувати критерій можливості подальших спрощень за означеним частотним діапазоном; перехід від трьохмасової ДМ до двохмасової, за умови недотримання вказаного критерію, призвів до похибки щодо величини основної частоти близько 10%; 3) динамічні розрахунки машин з використанням ДМ і різних методів визначення власних частот дозволяють на основі відомих частот збуджуючих сил виявляти можливі біларезонансні режими експлуатації об'єкту і заздалегідь уникати їх шляхом внесення змін у конструкцію верстата на стадії проектування.

Ключові слова: привід металорізального верстату, крутильна рядна динамічна модель, рівняння частот, основна частота, резонанс.

T.M. Karpenko, V.V. Shishkin. On some methods of determining proper frequencies torsional oscillations in metal-working machines. Forced torsional vibrations that occur in machine tool drives are one of the pressing problems of modern machine tool industry. The reasons for these fluctuations may be imbalances of rotating masses, structural imperfections of bearing units, operating or technological process features (for metal-cutting machines – eccentric clamping of the workpiece, processing of non-round workpieces, etc.). In this work, using the example of a real metal-cutting machine, the task of dynamic analysis of the drive of the main movement of the machine with determination of the natural frequencies of torsional vibrations is realized. The real object is replaced by a dynamic model (DM). When constructing the DM, the inertial and rigidity characteristics are

¹ канд. фіз.-мат. наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Дніпро, ORCID: 0000-0003-4042-0301, karpenko_t_n@pstu.edu

² канд. техн. наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Дніпро, ORCID: 0000-0001-5943-2180, shishkin_v_v@pstu.edu

determined from the conditions: – the kinetic energy of the object is equivalent to the kinetic energy of the DM (from this condition the axial moments of inertia of the concentrated masses of the row model are obtained); – the potential energy of elastic deformations of the object is equivalent to the potential energy of deformation of the DM (from this condition the rigidity coefficients of the DM are obtained). The natural frequencies of the row DM were determined in three ways: 1) by solving the frequency equation (exact method) in combination with the method of reducing the number of masses of A.P. Cherevko; 2) partial systems method (fundamental frequency only); 3) method of residuals (Tolle). The following conclusions were made: 1) the main (smaller) frequency can be found by any of the methods considered (since the results of the three methods coincided); 2) when simplifying the DM using the method of partial systems, the criterion for the possibility of further simplifications over the specified frequency range should be taken into account; the transition from a three-mass DM to a two-mass one if the criterion in this calculation was not met led to an error in determining the value of the fundamental frequency of about 10%; 3) dynamic calculations of machines using DM and methods for determining natural frequencies make it possible, based on known frequencies of disturbing forces, to identify possible near-resonant operating modes and avoid them in advance by making changes to the design of the machine at the design stage.

Key words: drive of a metal-cutting machine, torsional in-line dynamic model, frequency equation, fundamental frequency, resonance.

Постановка проблеми. Серед об'єктів, що зазнають динамічних навантажень, напружено-деформований стан яких істотно залежить від режимів експлуатації, практичний інтерес мають ділянки валів, що піддаються крутильним коливанням. При проектуванні таких систем конструктор машини змушений вирішувати питання, пов'язані, насамперед, із визначенням власних частот крутильних коливань валів, які, в свою чергу, залежать від інерційних та пружних параметрів деталей машини. Це є важливим як для забезпечення безрезонансних режимів роботи машини, так і для забезпечення міцності деталей, оскільки максимальні крутні моменти є функціями частот.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Розрахункам крутильних коливань валів присвячено багато джерел, зокрема [1-3]. Коливання в металорізальних верстатах вивчалися в роботах [4-7]. Власні частоти крутильних коливань трансмісій колісних машин визначено в роботах [8, 9].

Мета статті – запропонувати і реалізувати порядок дій для побудови рядної крутної динамічної та математичної моделей приводу головного руху металорізального верстату. Для побудованої динамічної моделі визначити власні частоти крутильних коливань, використовуючи різні методи розрахунку. Оцінити точність та ефективність методів, дати рекомендації щодо їх застосування.

Виклад основного матеріалу.

Технічна суть завдання та способи розв'язку.

Схема головного приводу верстату (рис. 1), що складається з електродвигуна, коробки швидкостей і шпинделя, в залежності від включених муфт і зубчастих зачеплень, дозволяє реалізувати більше 12 кінематичних схем.

Власні частоти крутильних коливань валів цих схем будуть різні. Дослідження динаміки руху даної механічної системи при різних варіантах включення електромагнітних муфт і зубчастих зачеплень передбачає визначення для кожного варіанту всіх власних частот, які не повинні збігатися з частотами можливих періодичних збуджуючих факторів. При цьому особливий інтерес викликає менша із власних частот, яку називають основною.

У верстатах спектр частот вимушених коливань визначається такими факторами:

- періодичною силою, що діє з боку ріжучого інструменту на заготовку під час її обробки;
- наявністю ексцентриситету при закріпленні заготовки;
- дисбалансом центру тяжіння валу;
- похибкою виготовлення або полумкою підшипникових опор та ін.

Для реалізації поставленої мети запропоновано алгоритм дій, який показаний на рис. 2.

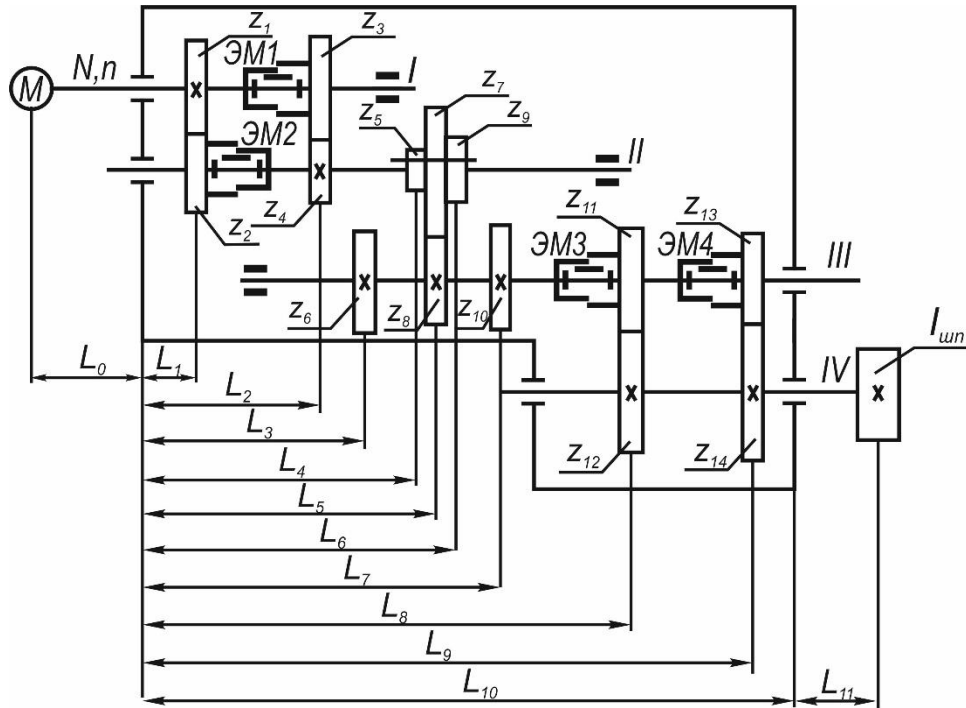


Рис. 1 – Схема головного приводу свердильного верстату



Рис. 2 – Алгоритм для побудови рядної крутильної динамічної моделі і визначення власних частот

Як відомо, точне вивчення динаміки машини, що складається з пружних тіл з розподіленими масами (ці тіла мають нескінченну кількість ступенів вільності), неможливо. Тому, від реального об'єкту переходять до спрощеної схеми – динамічної моделі (ДМ), рух якої описується певною кількістю узагальнених координат. Ця модель буде мати інерційні і пружні характеристики об'єкту, який вивчається, якщо будуть застосовані наступні базові тези.

Теза 1. Кінетична енергія об'єкту еквівалентна кінетичній енергії ДМ. З цієї умови отримують інерційні характеристики (у нашому випадку – осьові моменти інерції зосереджених мас).

Теза 2. Потенціальна енергія пружних деформацій об'єкту еквівалентна потенціальній енергії деформацій ДМ. Звідси знаходять коефіцієнти жорсткості або податливості елементів ДМ.

Реалізуючи ці тези, застосовують гіпотезу про те, що деформація тіла прямо пропорційна динамічному навантаженню. Тому, використовуючи закон Гука, отримують формули деформацій ДМ, які пов'язують з узагальненими координатами та узагальненими швидкостями.

Вивчаючи малі крутильні коливання поблизу режиму сталого рівномірного обертання, в якості узагальнених координат беруть кути закручування зосереджених мас φ_i .

Побудова вихідної динамічної моделі має виконуватись з відносно високою точністю, бо математична модель, з якої отримують рівняння частот, базується на ДМ.

Осьові моменти інерції муфт, зубчастих коліс та податливості з'єднань, зубчастих передач та ділянок валів визначають за відомими формулами. Осьові моменти інерції ділянок валів зводять до крайніх перерізів на підставі тези 1. Для цього визначається кінетична енергія елемента валу i , після інтегрування по довжині, отримують поправочний коефіцієнт для обчислення моменту інерції валу.

Декілька податливостей, послідовно розташованих пружних елементів, згідно з тезою 2, замінюють еквівалентною податливістю $e^* = \sum e_i$.

Чисельний аналіз задачі здійснювався для схеми, зображеної на рис. 3.

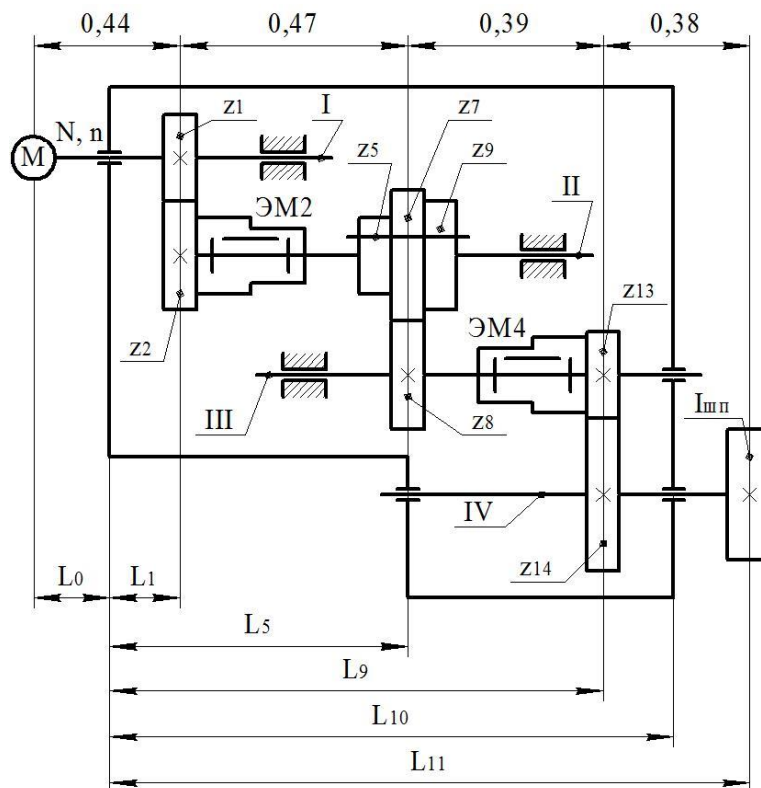


Рис. 3 – Кінематична схема приводу головного руху верстату для заданих умов підключення елементів (розміри надані в метрах)

Розрахунок проводився при наступних вихідних параметрах.

Параметри двигуна: потужність $N = 1,4 \text{ кВт}$; частота обертання валу $n = 970 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$; момент інерції ротора $I_{\text{рот}} = 1,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Момент інерції маси на шпинделі $I_{\text{ун}} = 0,00918 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Включені муфти і зубчасті зачеплення коліс: ЭМ2; ЭМ4, z_7 / z_8 . Діаметри валів, м: $D_I = 0,025$; $D_{II} = 0,030$; $D_{III} = 0,035$; $D_{IV} = 0,040$. Число зубців зубчастих коліс: $z_1 = 25$; $z_2 = 33$; $z_5 = 27$; $z_7 = 38$; $z_8 = 46$; $z_9 = 32$; $z_{13} = 27$; $z_{14} = 57$. Довжини ділянок валів, м: $L_0 = 0,40$; $L_1 = 0,04$; $L_5 = 0,51$; $L_9 = 0,90$; $L_{10} = 0,98$; $L_{11} = 0,30$. Модуль зубчастих коліс: $m = 3 \text{ мм}$. Ширина зубчастих коліс, м: $b = 0,030$. Щільність матеріалу зубчастих коліс і валів: $\rho = 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Кут зачеплення: $\alpha = 20^\circ$. Коефіцієнт питомої контактної податливості зубчастої передачі: $k_3 = 6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{Н}}$ – для прямозубих зубчастих коліс. Шпонкове з'єднання зубчастих коліс: вал I: висота шпонки $h_{\text{ун}} = 0,004 \text{ м}$, довжина з'єднання $l_{\text{с.ун}} = 0,03 \text{ м}$; вали II, III, IV: $h_{\text{ун}} = 0,0045 \text{ м}$, $l_{\text{с.ун}} = 0,03 \text{ м}$; коефіцієнт питомої контактної податливості шпонкових з'єднань $k_{\text{ун}} = 6,4 \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^3}{\text{Н}}$. Шліцьове з'єднання на валу II: середній діаметр шліців, м: $D_{\text{сп}} = 0,028$; довжина з'єднання $l_{\text{с.шл}} = 0,03 \text{ м}$; висота шліца $h_{\text{шл}} = 0,004 \text{ м}$; число шліців $z = 6$; коефіцієнт питомої контактної податливості шліцьових з'єднань $k_{\text{шл}} = 4 \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^3}{\text{Н}}$. Махові моменти інерції муфт: ЭМ2 : $GD_{\text{ЭМ2}}^2 = 0,3 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2}$; ЭМ4 : $GD_{\text{ЭМ4}}^2 = 0,6 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2}$.

Вихідна ДМ для даної схеми показана на рис.4.

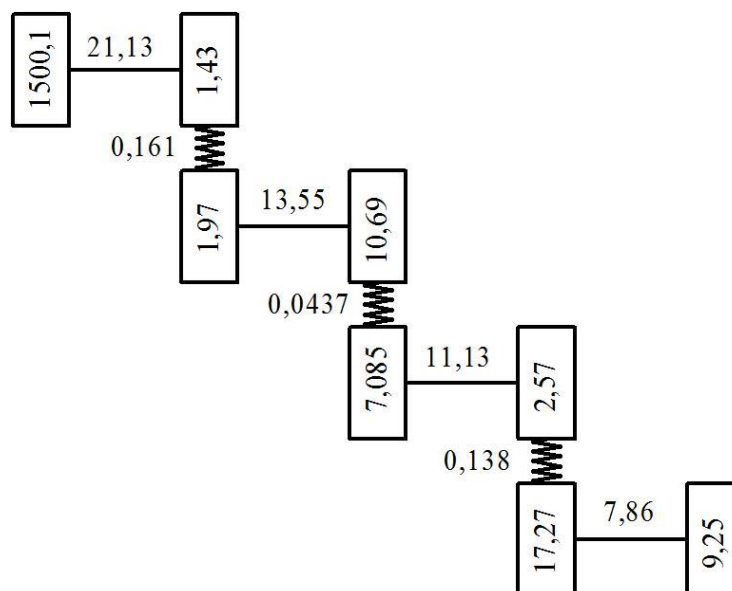


Рис. 4 – Вихідна динамічна модель з урахуванням прийнятих числових значень інерційних параметрів і величин податливостей

Порядок величин (10^{-5} – для податливостей і 10^{-3} – для осьових моментів інерції) на рис. 4 не позначено.

Побудову рядної динамічної моделі починаємо з вибору валу зведення. У якості такого валу можна прийняти будь-який вал пристрою, але зручно приймати вхідний вал. Обираємо вал I.

Визначаємо передаточне відношення між кожним i -тим валом і валом I (валом зведення) за формулою:

$$u_{i/I} = \frac{\omega_i}{\omega_I}, \quad (1)$$

де ω_i – кутова швидкість i -го валу;

ω_I – кутова швидкість I валу.

Тоді, зведений до валу I осьовий момент інерції маси, що розміщена на i -тому валу, буде дорівнювати:

$$I_{i/I}^{np} = I_i \cdot u_{i/I}^2. \quad (2)$$

Зведену до валу I податливість i -того валу, згідно тези 2, обчислюємо за формулою:

$$e_{i/I}^{np} = \frac{e_i^*}{u_{i/I}^2}. \quad (3)$$

Таким чином, маємо восьмимасову рядну ДМ, зображену на рис. 5.

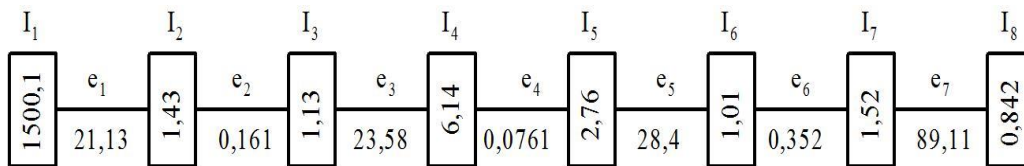


Рис. 5 – Розрахункова восьмимасова динамічна модель

Побудова математичної моделі і рівняння частот.

Диференціальне рівняння руху рядної ДМ (математичну модель) складемо, застосовуючи рівняння Лагранжа другого роду для механічної системи, що має 8 ступенів вільності [10-12]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i}, \quad i=1,2 \dots 8. \quad (4)$$

Якщо виразити кінетичну енергію T через узагальнені швидкості $\dot{\varphi}_i$, а потенціальну енергію Π – через узагальнені координати φ_i , отримаємо матрицю інерції $\|a\|$ та матрицю жорсткості $\|c\|$. Тому, замість (4), будемо мати диференціальні рівняння руху

$$\|a\| \{ \ddot{\varphi}_i \} + \|c\| \{ \varphi_i \} = 0. \quad (5)$$

Компонентами матриці інерції будуть моменти інерції I_i , компонентами матриці жорсткості – коефіцієнти жорсткості, які дорівнюють $c_i = \frac{1}{e_i}$.

Частинні розв’язки диференціальних рівнянь (5) шукаємо у вигляді

$$\varphi_i = A_i \sin(kt + \alpha). \quad (6)$$

Після підстановки (6) у рівняння (5), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно A_i . Прирівнюючи головний визначник цієї системи нулю, отримуємо рівняння частот. Порядок цього рівняння відносно невідомої величини k^2 дорівнює кількості мас ДМ. Для восьмимасової ДМ визначник має вигляд:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{e_1} - I_1 \cdot k^2 & -\frac{1}{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{e_1} & \frac{1}{e_1} - I_2 \cdot k^2 + \frac{1}{e_2} & -\frac{1}{e_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e_2} & \frac{1}{e_2} - I_3 \cdot k^2 + \frac{1}{e_3} & -\frac{1}{e_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{e_3} & \frac{1}{e_3} - I_4 \cdot k^2 + \frac{1}{e_4} & -\frac{1}{e_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{e_4} & \frac{1}{e_4} - I_5 \cdot k^2 + \frac{1}{e_5} & -\frac{1}{e_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{e_5} & \frac{1}{e_5} - I_6 \cdot k^2 + \frac{1}{e_6} & -\frac{1}{e_6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{e_6} & \frac{1}{e_6} - I_7 \cdot k^2 + \frac{1}{e_7} & -\frac{1}{e_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{e_7} & \frac{1}{e_7} - I_8 \cdot k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Визначення власних частот рядної ДМ можна здійснити наступними способами:

- точним методом – розв’язанням рівняння частот (зазвичай із застосуванням спеціалізованих програм та математичних редакторів, наприклад, пакету MathCad);
- розв’язанням рівняння частот після спрощення ДМ за методом парціальних систем;
- методом залишків (Толле).

Як приклад реалізації точного методу, наведемо результати розв’язання рівняння частот для восьмимасової моделі (рис. 5). Нижче надається покроковий алгоритм дій, розрахований на користувачів початкового рівня.

Алгоритм розв’язання рівняння частот із застосуванням математичного редактору MathCad 14:

- 1) Ввести вихідні дані $I_i, e_i, i = 1, 2 \dots n$.
- 2) Скласти визначник рівняння частот (7) за допомогою команд: Додати (Insert) / Матриця (Matrix) і вводимо 8 рядків та 8 стовбців.
- 3) Для перетворення визначника (7) у рівняння виділити його і «перетягнути» у бік. Далі, використати команди: Символіка (Symbolics) / Матриця (Matrix) / Визначник (Determination).
- 4) Щоб отримати поліноміальні коефіцієнти рівняння треба клацнути «мишею» на отриманому рівнянні і вибрати команди: Символіка (Symbolics) / Поліноміальні коефіцієнти (Polynomial Coefficients).
- 5) Записати вираз виду $k = \text{polyroots}(\square)$, де замість \square - вставити поліноміальні коефіцієнти.
- 6) Записати вираз $k:=$. Після знаку « $=$ » відобразяться корені рівняння, тобто шукані частоти.

Результати визначення власних частот ДМ, зображеної на рис. 5, показані в таблиці 1.

Якщо діапазон збуджуючих факторів не вимагає знання вищих частот, коливальну систему зводять до ДМ з меншим числом ступенів вільності. У цій роботі був застосований метод А.П. Черевкова, заснований на заміні групи мас однією масою.

Так, маси I_2, I_3, I_4, I_5 були замінені однією масою з осьовим моментом інерції $I'_2 = I_2 + I_3 + I_4 + I_5$, а податливість ділянки між масою I_1 і новою масою I'_2 буде дорівнювати $e = \frac{1}{I'_2} [e_1 I_2 + (e_1 + e_2) I_3 + (e_1 + e_2 + e_3) I_4 + (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) I_5]$.

Таблиця 1

Результати обчислень для восьмимасової моделі

	0
0	$-3.143 \cdot 10^4$
1	$-2.629 \cdot 10^4$
2	$-2.169 \cdot 10^4$
3	$-1.951 \cdot 10^3$
4	$-1.594 \cdot 10^3$
5	$-1.013 \cdot 10^3$
6	-405,616
7	0
8	0
9	405,616
10	$1.013 \cdot 10^3$
11	$1.594 \cdot 10^3$
12	$1.951 \cdot 10^3$
13	$2.169 \cdot 10^4$
14	$2.629 \cdot 10^4$
15	$3.143 \cdot 10^4$

Після корекції номерів мас і податливостей, прийшли до п'ятимасової ДМ, зображеної на рис. 6.

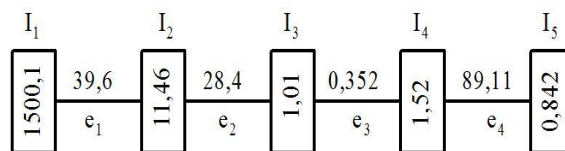


Рис. 6 – Розрахункова п'ятимасова модель

Після виконання пунктів вище запропонованого алгоритму, отримали частоти п'ятимасової ДМ, показані в Таблиці 2.

Таблиця 2

Результати обчислень для п'ятимасової моделі

	0
0	$-2.169 \cdot 10^4$
1	$-1.593 \cdot 10^3$
2	-995,864
3	-404,063
4	0
5	0
6	404,063
7	995,864
8	$1.593 \cdot 10^3$
9	$2.169 \cdot 10^4$

Визначення основної частоти з використанням методу парціальних систем.

Метод парціальних систем дозволяє спростити вихідну ДМ шляхом доведення її до виду, коли рішення частотного рівняння не викликає труднощів. Для реалізації методу пропонуються дві типові системи (названі «парціальними»), на які можна розбити будь-яку рядну ДМ.

Система I типу – одномасова, з базовим інерційним елементом (рис. 7). Вона включає масу I_i з пружними елементами, податливості яких дорівнюють e_{i-1} та e_i .

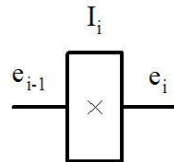


Рис. 7 – Парціальна система I типу

Частота такої системи визначається за формулою:

$$k_i = \sqrt{\frac{e_{i-1} + e_i}{I_i \cdot e_{i-1} \cdot e_i}}. \quad (8)$$

Система II типу – двомасова (рис. 8). Вона складається з двох мас I_i і I_{i+1} , з розташованим між ними пружним елементом (у нашому випадку – ділянка безінерційного валу) податливістю e_i .

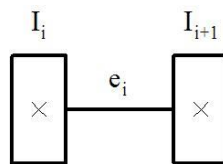


Рис. 8 – Парціальна система II типу

Частота такої системи визначається за формулою:

$$k_{i,i+1} = \sqrt{\frac{I_i + I_{i+1}}{I_i \cdot I_{i+1} \cdot e_i}}. \quad (9)$$

Метод зводиться до наступних кроків.

1) Вихідну ДМ поділяють на парціальні системи двох типів, після чого за формулами (8) і (9) знаходять їх парціальні частоти.

2) У випадку, коли одна або кілька парціальних частот значно (в 3 або більше разів) перевищують верхню межу частотного діапазону, що досліджується, проводять спрощення ДМ. Спрощення полягає у зменшенні кількості мас ДМ на одиницю шляхом заміни парціальної системи з найбільшою частотою на парціальну систему іншого типу.

Так, якщо k_{\max} має система I типу, її замінюють на систему II типу. Нові маси матимуть

такі моменти інерції $I'_i = \frac{e_i}{e_{i-1} + e_i} \cdot I_i$ та $I'_{i+1} = \frac{e_{i-1}}{e_{i-1} + e_i} \cdot I_i$ з податливістю між ними $e'_i = e_{i-1} + e_i$.

Якщо k_{\max} має система II типу, її замінюють системою I типу. Нова маса матиме момент інерції $I'_i = I_i + I_{i+1}$, а податливості ділянок валу будуть дорівнювати $e'_{i-1} = \frac{I_{i+1}}{I_{i+1} + I_i} \cdot e_i$ та

$$e'_i = \frac{I_i}{I_{i+1} + I_i} \cdot e_i.$$

При таких замінах парціальних систем власні частоти не змінюються.

3) Спрощену на першому етапі ДМ перевіряють на можливість подальших спрощень та повторюють процедуру, починаючи з п. 2, за наявності можливості та необхідності.

4) Спрощення ДМ припиняють, коли не виконується критерій можливості спрощення або ДМ зводиться до трьохмасової, при якій частотне рівняння має вигляд:

$$k^4 - \left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 \cdot I_2} \cdot c_1 + \frac{I_2 + I_3}{I_2 \cdot I_3} \cdot c_2 \right) \cdot k^2 + \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 \cdot I_2 \cdot I_3} \cdot c_1 \cdot c_2 = 0. \quad (10)$$

Розв'язування такого рівняння не створює труднощів.

Результати чисельного аналізу за допомогою методу парціальних систем для схеми, зображеної на рис. 3, представлені на рис. 9. На ньому показано процес поетапного спрощення восьмимасової ДМ із зменшенням кількості мас на одиницю. У верхній та нижній частинах кожної ДМ показані власні частоти парціальних систем обох типів. Найбільша з частот виділена рамкою. В якості верхньої межі частотного діапазону, що досліджується, прийнята частота $k_{\text{чод}} = 405 \text{ c}^{-1}$.

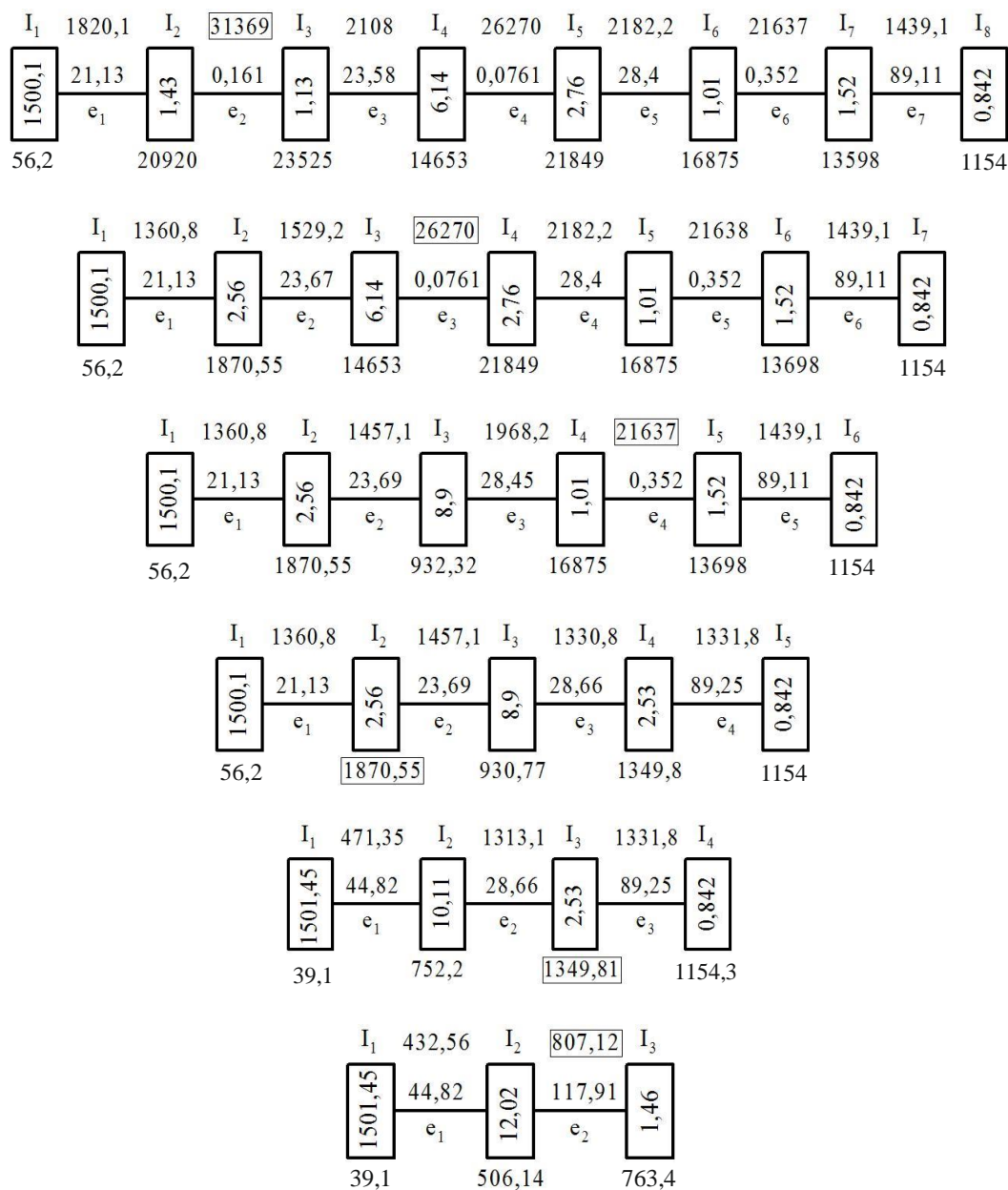


Рис. 9 – Поетапне спрощення ДМ і власні частоти парціальних систем

Примітка. Основним недоліком методу Толле є чутливість до точності обчислень. А оскільки частоти можуть відрізнятися на кілька порядків, підбирати їх – трудомістке завдання. Тому цей метод найчастіше використовують для перевірки величин частот, отриманих іншими способами.

Висновки

1. Запропонований в роботі алгоритм застосування редактора MathCad дозволяє визначити всі власні частоти крутильних коливань багатомасової рядної крутильної динамічної моделі. На практиці це означає, що під час проектування машини з'явилася можливість з метою недопущення білярезонансних режимів (при відомому спектрі частот збудуючого фактору) отримувати потрібні власні частоти крутильних коливань за рахунок підбору параметрів конструкції (геометричних, інерційних, пружних).

2. Для конкретного металорізального верстату, який взято як приклад, показано алгоритм побудови багатомасової крутильної динамічної моделі його головного приводу. Для цієї моделі проведено розрахунок частот власних крутильних коливань точним і двома наближеними методами.

3. Запропоновані практичні рекомендації щодо застосування методу парціальних систем для спрощення багатомасових динамічних моделей і перевірена значимість дотримання рекомендацій щодо доцільності подальшого спрощення динамічної моделі.

4. Чисельний аналіз показав, що основна (менша) частота крутильних коливань динамічної моделі збіглася при застосуванні трьох способів її визначення.

Перелік використаних джерел:

1. Коливання неконсервативних механічних систем: монографія / Бабенко А. Є., Боронко О. О., Лавренко Я. І., Трубочов С. І. Київ : Нац. техн. ун-т України «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2020. 153 с.
2. Papastavridis J. G. The variational and virial-like theory of oscillations and stability of non-conservative and/or non-linear mechanical systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1986. Vol. 104. Iss. 2. Pp. 209-227. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(86\)90264-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(86)90264-6).
3. Galley C. R. Classical mechanics of nonconservative systems. *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110. Iss. 17. Pp. 1-5. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.174301>.
4. Попов В. І., Локтев В. І. Динаміка верстатів. Київ : Техніка, 1975. 135 с.
5. Welbourn D. B., Smith J. D. Machine-tool dynamics: an introduction. Cambridge University Press, 1970. 152 p.
6. Liljerehn A. Machine tool dynamics. A constrained state-space substructuring approach: thesis for the degree of doctor of philosophy in solid and structural mechanics. Göteborg, Sweden, 2016. 55 p.
7. Fast flexible multibody dynamic analysis of machine tools using modal state space models / Chang-Ju Kim, Jeong-Seok Oh, Chun-Hong Park, Chang-Ho Lee. *CIRP Annals*. 2023. Vol. 72. Iss. 1. Pp. 341-344. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2023.04.064>.
8. Білик Б. В., Кусий А. Г. Частоти власних крутильних коливань трансмісій повнопривідних колісних машин. *Науковий вісник НЛТУ України: Проектування, виробництво та експлуатація автотранспортних засобів і поїздів*. Львів : НЛТУУ, 2003. Вип. 12.7. С. 6-12.
9. Galvagno E., Velardocchia M., Vigliani A. Torsional oscillations in automotive transmissions: experimental analysis and modelling. *Shock and Vibration*. 2016. Pp. 1-14. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/5721960>.
10. Павловський М. А. Теоретична механіка. Київ : Техніка, 2002. 512 с.
11. Lüdde C. S., Dreizler R. M. Theoretical Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. 402 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-11138-9>.
12. Ilisie V. Lectures in Classical Mechanics. With Solved Problems and Exercises. Springer Nature Switzerland AG, 2020. 359 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-38585-9>.

References:

1. A. Ye. Babenko, O. O. Boronko, Ya. I. Lavrenko, and S. I. Trubachov, *Kolyvannia nekonservatyvnykh mekhanichnykh system: monohrafiia* [Oscillations of non-conservative mechanical systems: monograph]. Kyiv, Ukraine: Nats. tekhn. un-t Ukrainy «KPI imeni Ihoria Sikorskoho» Publ., 2020. (Ukr.)

2. J.G. Papastavridis, «The variational and virial-like theory of oscillations and stability of non-conservative and/or non-linear mechanical systems», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 104, iss. 2, pp. 209-227, 1986. doi: **10.1016/0022-460X(86)90264-6**.
3. C.R. Galley, «Classical mechanics of nonconservative systems», *Physical Review Letters*, vol. 110, iss. 17, pp. 1-5, 2013. doi: **10.1103/PhysRevLett.110.174301**.
4. V.I. Popov, and V.I. Loktev, *Dynamika verstativ* [Dynamics of machines]. Kyiv, Ukraine: Tekhnika Publ., 1975. (Ukr.)
5. D.B. Welbourn, and J.D. Smith, *Machine-tool dynamics: an introduction*. Cambridge University Press Publ., 1970.
6. A. Liljerehn, «Machine tool dynamics. A constrained state-space substructuring approach», thesis for the degree of doctor of philosophy in solid and structural mechanics. Göteborg, Sweden, 2016.
7. Chang-Ju Kim, Jeong-Seok Oh, Chun-Hong Park, and Chang-Ho Lee, «Fast flexible multibody dynamic analysis of machine tools using modal state space models», *CIRP Annals*, vol. 72, iss. 1, pp. 341-344, 2023. doi: **10.1016/j.cirp.2023.04.064**.
8. B.V. Bilyk, and A.H. Kusi, «Chastoty vlasnykh krutylnykh kolyvan transmisii povnoprivodnykh kolisnykh mashyn» [«Frequencies of natural torsional oscillations of transmissions of four-wheel drive vehicles»], *Naukovyi visnyk NLTU Ukrainy: Proektuvannia, vyrobnytstvo ta ekspluatatsiia avtotrans-portnykh zasobiv i poizdiv – Scientific bulletin of NLTU of Ukraine: Design, production and operation of vehicles and trains*, vol. 12.7, pp. 6-12, 2003. (Ukr.)
9. E. Galvagno, M. Velardocchia, and A. Vigliani, «Torsional oscillations in automotive transmissions: experimental analysis and modelling», *Shock and Vibration*, pp. 1-14, 2016. doi: **10.1155/2016/5721960**.
10. M.A. Pavlovskiy, *Teoretychna mekhanika* [Theoretical mechanics]. Kyiv, Ukraine: Tekhnika Publ., 2002. (Ukr.)
11. C.S. Lüdde, and R.M. Dreizler, *Theoretical Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. doi: **10.1007/978-3-642-11138-9**.
12. V. Iisie, *Lectures in Classical Mechanics. With Solved Problems and Exercises*. Springer Nature Switzerland AG, 2020. doi: **10.1007/978-3-030-38585-9**.

Стаття надійшла 10.03.2024

Стаття прийнята 08.04.2024