

УДК 517.938:004.94

DOI: 10.31498/2225-6733.53.1.2026.359770

ГРАФІЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ НЕПЕРЕРВНИХ ДИСИПАТИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ У СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

Луваренко О.В. канд. техн. наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Дніпро, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-3005-0531>, e-mail: luparenko_e_v@pstu.edu

У роботі розглядається задача якісного дослідження складної динаміки неперервних дисипативних систем, для яких аналітичний аналіз глобальної поведінки траєкторій є ускладненим. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю ефективних інструментів візуального аналізу фазової структури тривимірних нелінійних систем, що застосовуються в природничих науках, інженерії та прикладній математиці. Метою роботи є систематизація та програмна реалізація комплексу графічних методів дослідження фазових траєкторій дисипативних динамічних систем у середовищі MATLAB та оцінка їх інформативності для ідентифікації типів динамічних режимів. У дослідженні використано чисельне інтегрування автономних систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку та сукупність графічних методів, зокрема побудову фазових портретів, перетинів Пуанкаре, карт повернення, рекурентних діаграм і візуалізацію особливих точок. Розроблений інтегрований програмний комплекс із графічним інтерфейсом забезпечує проведення чисельного експерименту та узгоджене отримання фазових індикаторів. Показано, що комплексне застосування цих засобів забезпечує наочне виявлення стаціонарних, періодичних і хаотичних режимів руху, дозволяє встановлювати структуру атракторів, характер їхньої геометрії та особливості переходів між режимами. Результати продемонстровано на прикладі класичних моделей Лоренца та Росслера. Наукова новизна полягає в узагальненні та інтеграції графічних методів фазового аналізу в єдиному програмному середовищі з можливістю паралельної інтерпретації різних візуальних індикаторів динаміки. Практична значущість роботи визначається можливістю використання розробленого підходу для дослідження широкого класу нелінійних моделей та підвищенням відтворюваності обчислювальних експериментів. Подальші дослідження пов'язані з поєднанням візуальних методів із кількісними характеристиками хаотичної динаміки, зокрема ентропійними показниками та показниками стійкості.

Ключові слова: дисипативна динамічна система; фазовий простір; фазові траєкторії; графічні методи аналізу; перетин Пуанкаре; карта повернення; рекурентний аналіз; хаотичний атрактор; нелінійна динаміка; MATLAB.

Постановка проблеми

Сучасні дослідження нелінійних динамічних систем демонструють, що навіть відносно прості математичні моделі можуть породжувати складну просторово-часову поведінку, включаючи біфуркаційні переходи, мультистабільність і хаотичну динаміку. Для тривимірних автономних систем звичайних диференціальних рівнянь, що описують дисипативні процеси, глобальний аналіз структури фазового простору у більшості випадків є аналітично недосяжним. Це зумовлює необхідність використання чисельних та графічних методів, здатних відобразити геометричну організацію траєкторій і характер інваріантних множин.

Дисипативні динамічні системи характеризуються стисканням фазового об'єму та формуванням атракторів різної природи – регулярних (стаціонарних, періодичних) або хаотичних. Виявлення типу режиму руху, структури атрактора та особливостей переходів між режимами є складною задачею, оскільки класичні аналітичні методи забезпечують переважно локальну інформацію про поведінку поблизу стаціонарних точок і не дають повної картини глобальної динаміки.

Проблема полягає у відсутності узгодженого інструментального підходу, який дозволяв би в єдиному середовищі поєднувати різні графічні засоби аналізу – фазові портрети, перетини Пуанкаре, карти повернення, рекурентні діаграми – та інтерпретувати їх результати як взаємодоповнювальні характеристики

динамічного режиму. Незважаючи на поширеність кожного з методів окремо, їх комплексне застосування часто носить фрагментарний характер і не має систематизованої реалізації.

Окремим аспектом розглядуваної проблеми є її інструментальна реалізація. Хоча середовище MATLAB містить розвинені засоби чисельного інтегрування та базової візуалізації результатів, його стандартні функції орієнтовані переважно на побудову окремих графіків і не забезпечують комплексної підтримки методів фазового аналізу. Реалізація перетинів Пуанкаре, карт повернення та рекурентних діаграм потребує додаткової обробки часових рядів, контролю напрямку перетину площин, узгодження вибірок і спеціалізованих алгоритмів обчислення відстаней між станами системи. У типовій практиці ці процедури виконуються за допомогою розрізнених скриптів, що ускладнює відтворюваність досліджень і цілісну інтерпретацію результатів. Це зумовлює необхідність створення інтегрованого програмного комплексу, який поєднує чисельне моделювання з систематизованими графічними індикаторами динамічних режимів.

Предметом дослідження є графічні методи аналізу фазових траєкторій неперервних дисипативних динамічних систем у тривимірному фазовому просторі. Основними аспектами дослідження виступають візуалізація глобальної структури траєкторій, зниження розмірності динаміки за допомогою перетинів

Пуанкаре, дослідження взаємозв'язків між послідовними станами через карти повернення та аналіз повторюваності станів за допомогою рекурентних діаграм.

Значущість розв'язання цієї проблеми полягає в розширенні можливостей якісного аналізу складних нелінійних моделей, що застосовуються у фізиці, технічних системах, біології та інших галузях, де хаотичні режими мають прикладне значення. Формалізація та інтеграція графічних методів сприяє підвищенню надійності інтерпретації чисельних експериментів і дозволяє більш обґрунтовано ідентифікувати типи динамічних режимів.

У межах цієї роботи дослідження спрямоване на вирішення таких питань:

- які графічні індикатори є найбільш інформативними для розрізнення регулярних і хаотичних режимів;
- як узгоджуються результати різних графічних методів між собою;
- якою мірою інтеграція цих методів у єдиному програмному середовищі підвищує ефективність фазового аналізу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідження неперервних дисипативних динамічних систем у сучасній нелінійній динаміці спираються на поєднання якісної теорії та чисельно-графічних методів, що дозволяють отримувати інтерпретовані уявлення про складну поведінку систем у фазовому просторі. Базові уявлення про хаотичну динаміку, структуру фазових портретів, аттрактори та чутливість до початкових умов систематизовано у фундаментальних працях, які й надалі визначають методологічні підходи до аналізу нелінійних систем [1, 2]. Для задач параметричного аналізу та дослідження сценаріїв переходу між режимами важливе місце посідає прикладна теорія бифуркацій, у межах якої сформульовано універсальні механізми виникнення складної динаміки та розроблено інструменти їх дослідження [3].

Упродовж останніх 10–20 років значного розвитку набули графічні методи, орієнтовані на редукцію розмірності та геометричну інтерпретацію динаміки. Зокрема, перерізи Пуанкаре та карти повернення залишаються ефективними засобами аналізу періодичних, квазіперіодичних і хаотичних режимів. Разом із тим показано, що для нетривіальних класів моделей, зокрема систем із розривністю або дробовими похідними, побудова коректного відображення Пуанкаре потребує спеціальних чисельних процедур і ретельного контролю моментів перетину фазової траєкторії з обраною секцією [4]. Це підкреслює, що графічний аналіз не зводиться до побудови окремих ілюстрацій, а вимагає комплексних алгоритмічних рішень та спеціалізованого програмного інструментарію.

Вагомий розвиток у сучасних дослідженнях отримав рекурентний аналіз як інструмент виявлення геометричної структури фазових траєкторій.

Запропоновані раніше рекурентні діаграми [5] стали основою для формування методів Recurrence Quantification Analysis (RQA), які дозволяють кількісно характеризувати складність динаміки та фіксувати зміни режимів [6]. Узагальнюючі огляди рекурентного аналізу систематизують його теоретичні засади, варіанти реалізації та прикладні можливості для широкого класу складних систем [7]. Водночас у низці робіт досліджено вплив шумів спостереження на рекурентні характеристики, що є принципово важливим для коректного застосування цих методів у чисельних і експериментальних дослідженнях [8]. Новітні публікації також зосереджені на вдосконаленні вибору параметрів рекурентного аналізу та підвищенні відтворюваності результатів [9].

Паралельно з рекурентними підходами активно розвиваються геометрично-структурні методи, що поєднують фазовий аналіз із інструментами теорії складних мереж. Показано, що мережеві подання часових рядів можуть розглядатися як доповнення до класичних графічних методів і надавати додаткові структурні ознаки динамічних режимів [10]. Такі підходи розширюють можливості інтерпретації результатів та зменшують залежність висновків від суто візуального аналізу окремих графічних образів.

Важливим напрямом сучасних досліджень є розвиток програмних комплексів і бібліотек, що інтегрують чисельне моделювання з обчисленням геометричних і кількісних індикаторів. Для аналізу часових рядів і рекурентно-мережевих методів створено спеціалізовані програмні засоби, які забезпечують комплексний підхід до дослідження нелінійної динаміки [11]. Для задач хаосу й аналізу фазових траєкторій також використовуються сучасні бібліотеки, орієнтовані на відтворювані обчислення індикаторів динамічної складності [12]. У середовищі MATLAB розроблено ефективні інструменти для чисельного аналізу бифуркацій і continuation-методів, які дозволяють досліджувати параметричні переходи у складних моделях [13, 14].

Разом із тим аналіз літератури свідчить, що на практиці реалізація графічних методів дослідження нелінійної динаміки часто має фрагментарний характер. Існуючі програмні рішення зазвичай орієнтовані на окремі класи задач або потребують значних зусиль для інтеграції різних інструментів. Попри те, що MATLAB залишається стандартним середовищем для інженерних і наукових розрахунків, його вбудовані засоби не забезпечують єдиного інтегрованого інструменту для систематизованого візуального аналізу нелінійної динаміки. У результаті існуючі підходи не забезпечують узгодженої та відтворюваної реалізації повного набору графічних індикаторів у межах одного середовища.

Українські публікації з цієї тематики представлені переважно методичними й прикладними роботами, які підтверджують практичну релевантність рекурентних і графічних підходів до аналізу часових рядів [15]. Водночас вони не усувають проблему

комплексної інтеграції графічних методів у межах одного інструментального середовища.

Чисельні методи дослідження динамічних систем цього класу, зокрема питання інтегрування систем диференціальних рівнянь та оцінювання точності отриманих розв'язків, розглянуто авторами в попередній роботі [16]. Поточна стаття є логічним продовженням цього дослідження і присвячена графічним методам фазового аналізу, які у поєднанні з чисельними підходами забезпечують більш повне вивчення властивостей динамічних систем.

Таким чином, аналіз останніх досліджень і публікацій показує, що графічні методи та геометричні характеристики фазової динаміки є добре розробленими на теоретичному рівні та активно застосовуються в сучасних дослідженнях. Водночас недостатньо систематизованим залишається питання їх узгодженої реалізації та використання в єдиному програмному комплексі, орієнтованому на швидкий і відтворюваний візуальний аналіз у середовищі MATLAB, що й визначає актуальність і спрямованість даної роботи.

Мета статті

Метою роботи є систематизація та програмна реалізація комплексу графічних методів дослідження фазових траєкторій неперервних дисипативних динамічних систем у середовищі MATLAB та аналіз їх інформативності для ідентифікації типів динамічних режимів.

Матеріали та методи

Об'єктом дослідження є нелінійні неперервні дисипативні динамічні системи, математична модель яких у загальному вигляді описується системою трьох автономних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z) \end{cases}$$

де x, y, z – змінні стану, що визначають положення точки у фазовому просторі R^3 , t – час, f_1, f_2, f_3 – неперервно-диференційовані нелінійні функції. Дисипативність досліджуваних систем визначається від'ємною дивергенцією векторного поля $div F < 0$, що зумовлює експоненціальне стиснення фазового об'єму; за наявності обмежених траєкторій це приводить до формування інваріантної граничної множини (атрактора). Поведінка таких систем характеризується наявністю стаціонарних, періодичних та хаотичних режимів.

Предметом дослідження є методи графічного аналізу фазових траєкторій і динамічних режимів, а також алгоритми їх систематизованої програмної реалізації

для візуальної діагностики та інтерпретації результатів чисельного моделювання.

Дослідження базується на чисельному моделюванні динамічних систем у середовищі MATLAB. Для отримання часових реалізацій фазових траєкторій використовувалися стандартні методи інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь. Обчислення виконувалися із застосуванням вбудованих солверів сімейства Runge–Kutta: інтегратора *ode45* для нежорстких систем та солвера *ode15s* для жорстких моделей з адаптивним кроком. У результаті інтегрування формувалися масиви фазових координат, що описують еволюцію системи у фазовому просторі для різних початкових умов і значень параметрів.

Отримані часові реалізації використовувалися як вихідні дані для подальшого геометричного аналізу. На їх основі виконувалася побудова фазових портретів у дво- та тривимірному просторі станів, що дозволяло дослідити структуру атракторів, локалізувати області притягання та виявити характер руху. Для зменшення розмірності задачі та аналізу внутрішньої структури траєкторій формувалися перерізи Пуанкаре та карти повернення, які відображають взаємозв'язок між послідовними станами системи.

Визначення точок перетину фазової траєкторії із заданою січною гіперплощиною здійснювалося із застосуванням механізму Events вбудованих функцій інтегрування MATLAB, що дозволяє точно фіксувати моменти досягнення заданих умов без порушення чисельної точності інтегрування. Це забезпечувало коректність побудови перерізів Пуанкаре та пов'язаних з ними карт повернення.

Для аналізу повторюваності станів системи застосовувався рекурентний аналіз. На основі часових реалізацій будувалися рекурентні діаграми, що відображають близькість станів у різні моменти часу. Перед побудовою виконувалося нормування даних і вибір параметрів вкладення, що дозволяло коректно відтворити геометрію фазового простору та уникнути спотворення структури діаграми. Порогове значення ϵ , що визначає максимальну відстань між станами, при якій вони вважаються рекурентними, обирається автоматично засобами MATLAB на основі статистичних характеристик нормованого часового ряду, що забезпечує адаптивність методу до масштабу конкретної траєкторії.

З метою узгодженого застосування всіх перелічених процедур розроблено інтегрований програмний комплекс у середовищі MATLAB, який автоматизує побудову фазових індикаторів динаміки та забезпечує узгоджене отримання геометричних характеристик для одного чисельного розв'язку: фазових портретів, перерізів Пуанкаре, карт повернення, рекурентних діаграм, а також визначення особливих точок і їх характеристик. Варіювання параметрів моделі здійснюється у процесі чисельного експерименту, що дозволяє досліджувати перебудову динамічних режимів. Програмний комплекс також містить інструмент побудови

біфуркаційних діаграм, детальне дослідження яких виходить за межі даної роботи та є предметом подальших досліджень. Інтеграція обчислювальних і аналітичних процедур підвищує узгодженість обчислень та відтворюваність отриманих результатів.

Приклад використання програмного комплексу наведено на рис. 1. За результатами одного чисельного інтегрування автоматично формуються фазовий портрет, переріз Пуанкаре та часові реалізації, що забезпечує цілісний аналіз динамічного режиму.

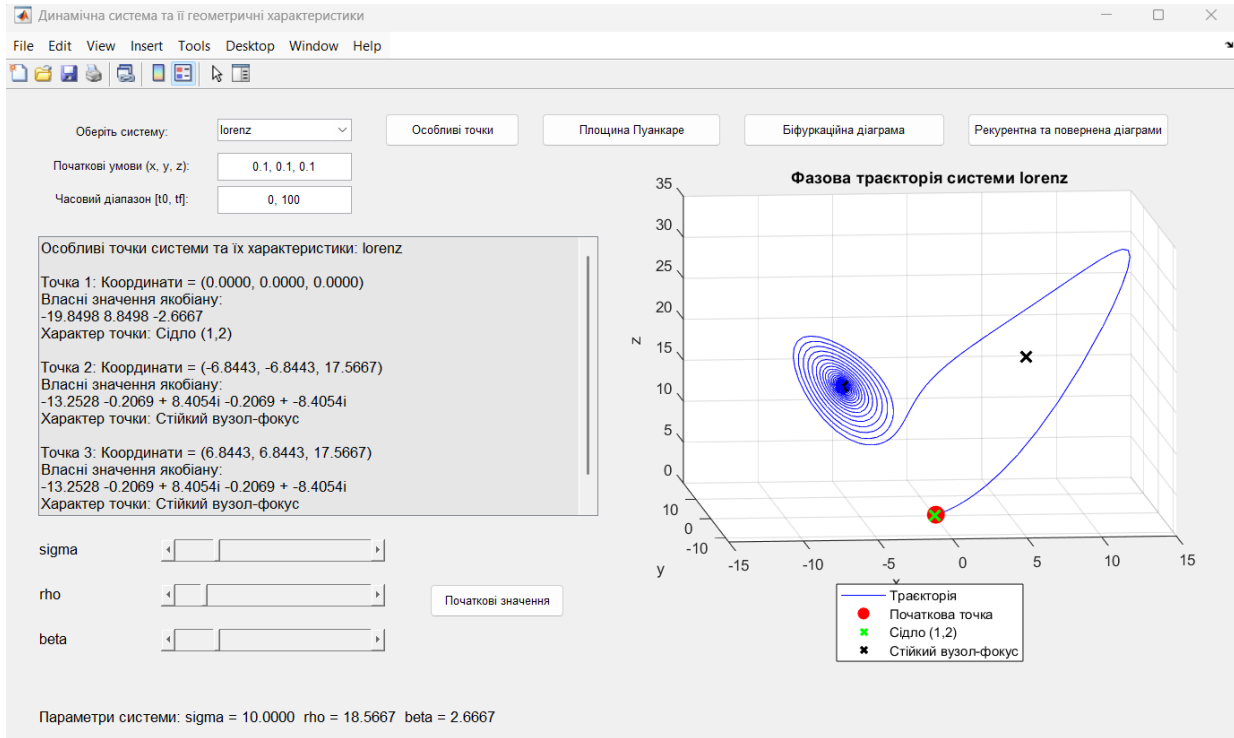


Рис. 1 – Структура обчислювального експерименту та візуалізація фазових індикаторів

Виклад основного матеріалу

У межах проведеного дослідження аналіз динамічної поведінки неперервних дисипативних систем здійснюється із застосуванням графічних методів фазового аналізу. Їх використання дозволяє дослідити структуру фазових траєкторій, встановити тип динамічного режиму та виявити геометричні особливості інваріантних множин, які складно визначити аналітичними методами.

Для ілюстрації властивостей дисипативних динамічних систем подальший аналіз проводиться на двох класичних моделях – системах Лоренца та Росслера.

Дослідження проводиться шляхом зміни керуючих параметрів і аналізу особливих точок систем. Для кожної моделі будуються фазові портрети, перерізи Пуанкаре, карти повернення та рекурентні діаграми, які використовуються як взаємодоповнювальні індикатори режиму руху.

Першою досліджується система Лоренца, що є однією з базових моделей хаотичної динаміки. Вона описується системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

де $\sigma, b, r > 0$ – параметри системи, що визначають характер її динамічної поведінки.

Дивергенція системи Лоренца $divF = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b) < 0$ у всій області визначення, отже, фазовий об'єм у системі зменшується експоненціально з часом, що свідчить про її дисипативний характер і пояснює існування обмеженої інваріантної множини – атрактора, до якого прямують траєкторії з широкого класу початкових умов.

За різних значень параметра r при $\sigma = 10, b = 8/3$ система Лоренца демонструє зміну режимів руху: від збіжності траєкторій до стійкої особливої точки до періодичних коливань і подальшого виникнення хаотичної поведінки. Так, при малих значеннях (наприклад, $r = 5$) траєкторії сходяться до однієї стійкої особливої точки (рис. 2). Фазовий портрет демонструє асимптотичну збіжність усіх траєкторій до

єдиної точки рівноваги, що відповідає режиму стійкого стаціонарного стану. Відсутність замкнених орбіт і розсіювання траєкторій у фазовому просторі підтверджує відсутність автоколивань у системі за даних параметрів.

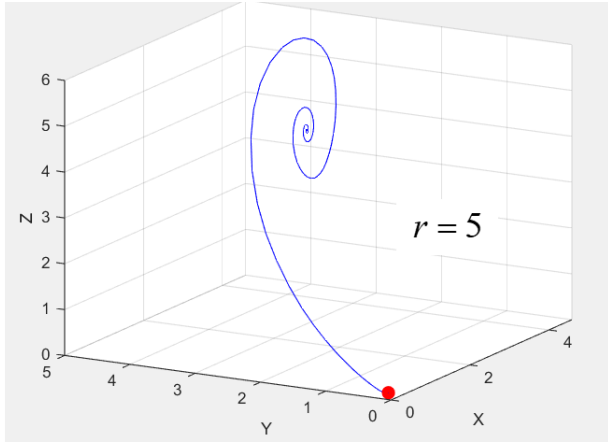


Рис. 2 – Фазовий портрет системи Лоренца при $r = 5$

Таким чином, при малих значеннях параметра r система повністю втрачає динамічну активність і вироджується у стаціонарний режим. Збільшення r призводить до якісної зміни поведінки – виникнення стійких коливань.

У випадку $r = 15$ система демонструє періодичну поведінку з замкненою орбітою (рис. 3). На фазовому портреті формується граничний цикл, що відповідає періодичному режиму руху. Траєкторії з різних початкових умов притягуються до єдиної замкненої орбіти, що свідчить про існування єдиного періодичного атратора. Отримана замкнена орбіта є стійкою – на відміну від нестійких рівноваг, вона зберігає свою форму при малих збуреннях початкових умов, що підтверджує усталеність коливального режиму за даних параметрів.

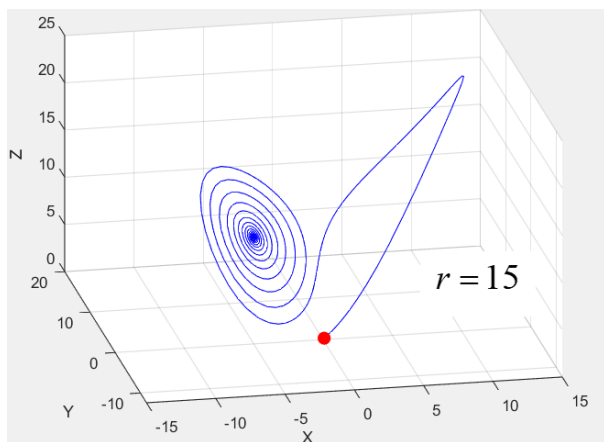


Рис. 3 – Фазовий портрет системи Лоренца при $r = 15$

При $r = 28$ виникає відомий хаотичний атрaktor Лоренца, що має вигляд двох «крил», між якими траєкторія аперіодично перемикається. Відсутність самоперетинів зумовлена єдиністю розв’язку автономної системи диференціальних рівнянь, тоді як хаотичність проявляється у чутливості до початкових умов і фрактальній структурі інваріантної множини (рис. 4).

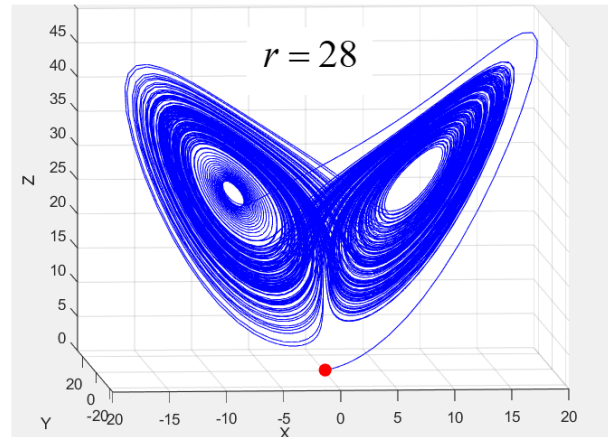


Рис. 4 – Фазовий портрет системи Лоренца при $r = 28$

Для пояснення механізму виникнення складної динаміки досліджено особливі точки системи Лоренца, які визначаються з умов стаціонарності

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Розв’язання відповідної системи алгебраїчних рівнянь дає одну центральну точку рівноваги $O(0,0,0)$ та дві симетричні точки $C_{1,2}(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.

Рівноваги C_1 і C_2 існують лише при $r > 1$, коли вираз $b(r-1)$ є додатнім; при $r \leq 1$ система має єдину стаціонарну точку O . Розроблений програмний комплекс автоматично визначає кількість стаціонарних точок залежно від значень параметрів і виводить відповідне повідомлення у разі їх відсутності або неповного набору. Тип рівноваг визначається за власними значеннями матриці Якобі системи. Центральна точка O є сідлом, тоді як дві симетричні точки C_1 і C_2 при $r > 1$ втрачають стійкість і стають сідло-фокусами (рис. 5). Власні значення матриці Якобі мають додатну дійсну частину, що визначає нестійкість рівноваг. Тому траєкторії не прямують до стаціонарного стану, а відштовхуються від околу рівноваг, що створює механізм формування атратора.

Особливі точки системи та їх характеристики: *logenz*

Точка 1: Координати = (0.0000, 0.0000, 0.0000)
Власні значення якобіану:
-22.8277 11.8277 -2.6667
Характер точки: Сідло (1,2)

Точка 2: Координати = (-8.4853, -8.4853, 27.0000)
Власні значення якобіану:
-13.8546 0.0940 + 10.1945i 0.0940 + -10.1945i
Характер точки: Сідло-фокус (2,1)

Точка 3: Координати = (8.4853, 8.4853, 27.0000)
Власні значення якобіану:
-13.8546 0.0940 + 10.1945i 0.0940 + -10.1945i
Характер точки: Сідло-фокус (2,1)

Рис. 5 – Характеристика особливих точок системи Лоренца при $r = 28$

Нестійкість цих рівноваг призводить до того, що фазові траєкторії не можуть збігатися до жодної з них і змушені переміщатися між околами точок C_1 та C_2 , що і формує характерну дволопатеву структуру атратора Лоренца. Розташування особливих точок системи у фазовому просторі наведено на рис. 6.

Симетричне розташування рівноваг відносно центральної області визначає дволопатеву геометрію атратора: траєкторія поперемінно перебуває в околі кожної з нестійких рівноваг, здійснюючи переходи між ними.

Для подальшого дослідження структури фазових траєкторій використано переріз Пуанкаре, що дозволяє

перейти від неперервної траєкторії до дискретної множини точок та дослідити її внутрішню організацію.

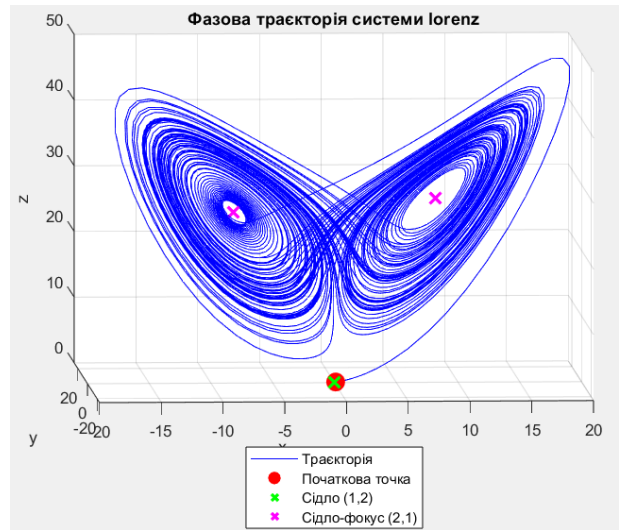


Рис. 6 – Особливі точки системи Лоренца при $r = 28$

У системі Лоренца як площину перерізу обрано $z = r - 1$, причому враховувалися лише перетини, що відбуваються в одному напрямку руху траєкторії, наприклад, коли $\frac{dz}{dt} > 0$ (рис. 7). Множина точок не зводиться до скінченного набору або замкненої кривої, а формує складну розширену структуру. Це відповідає аперіодичному режиму, що підтверджує наявність дивного атратора.

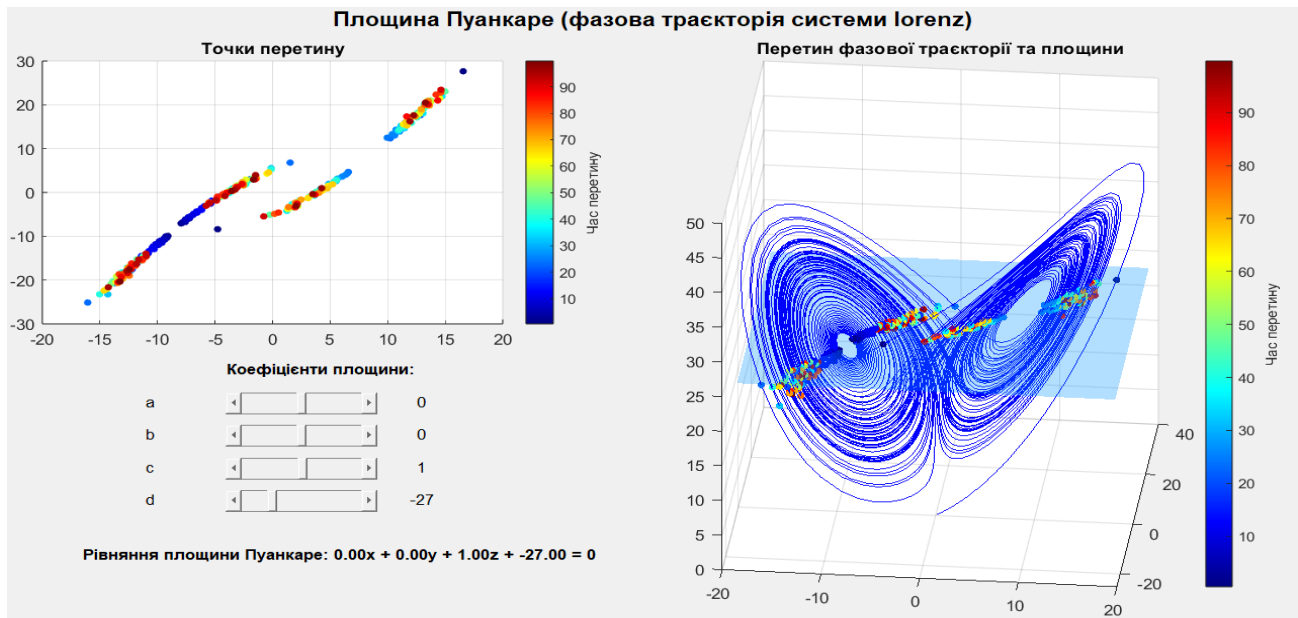


Рис. 7 – Переріз Пуанкаре для системи Лоренца при $r = 28$ площиною $z = r - 1 = 27$

У результаті кожній фазовій траєкторії відповідає послідовність точок на площині, яка відображає характер динамічного режиму.

На основі послідовності точок перетину побудовано карту повернення (рис. 8), у якій кожному значенню координати x_n відповідає наступне значення x_{n+1} . Відображення має нерегулярну залежність без утворення стабільної фіксованої точки або скінченного циклу, що відповідає відсутності періодичності. Розсіювання точок відображає сильну залежність наступного стану від попереднього.

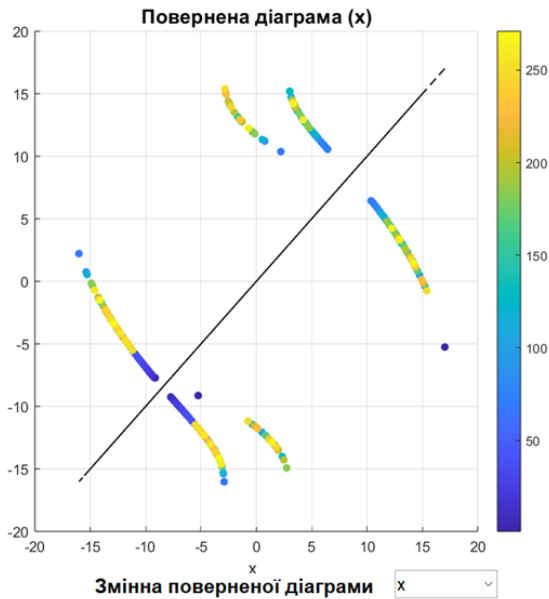


Рис. 8 – Карта повернення для проекції фазової траєкторії системи Лоренца при $r = 28$

Таким чином, неперервна динаміка системи зводиться до дискретного відображення на площині Пуанкаре. Для періодичного руху точки карти повернення утворюють скінченну множину або замкнену криву; у хаотичному режимі вони заповнюють нерегулярну область із фрактальною структурою. В отриманому випадку точки розподілені нерівномірно без вираженої структури, а близькі значення координати x_n можуть відповідати суттєво різним x_{n+1} – що є прямим індикатором чутливості до початкових умов.

Для дослідження повторюваності станів системи побудовано рекурентну діаграму на основі часової реалізації фазової траєкторії (рис. 9).

Рекурентна діаграма являє собою матрицю точок, кожна з яких відповідає парі моментів часу, у яких система перебуває у близьких станах фазового простору. Її структура відображає внутрішню організацію динамічного процесу.

Для регулярних режимів на діаграмі спостерігаються довгі діагональні лінії, що відповідають періодичності руху. У досліджуваному випадку діаграма має фрагментарний вигляд: присутні короткі

діагональні структури та їх фрагментація вказують на обмежену детермінованість процесу та узгоджуються з властивостями хаотичного атрактора.

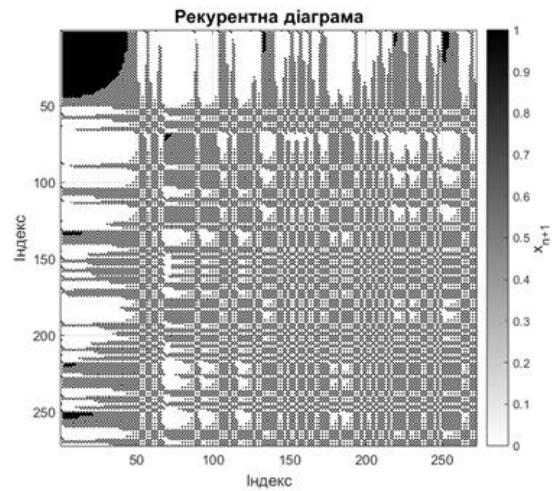


Рис. 9 – Рекурентна діаграма фазової траєкторії системи Лоренца при $r = 28$

Для перевірки універсальності застосованого підходу аналогічні дослідження проведено для системи Росслера, що також належить до класичних моделей хаотичної динаміки. Вона описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$

де a, b, c – параметри системи.

Дивергенція системи Росслера $divF = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = a + x - c$, тому вона дисипативна при $a + x - c < 0$, або у смузі $x < c - a$. За стандартних параметрів системи $a = 0,2, b = 0,2, c = 5,7$ у середній області руху виконується нерівність $divF < 0$, що означає стиснення фазового об'єму і підтверджує дисипативний характер системи та існування обмеженого атрактора.

Система Росслера має дві рівноважні точки, координати яких визначаються параметрами моделі a, b, c :

$$E_{1,2} = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right).$$

Рівноваги E_1 і E_2 є дійсними лише за виконання умови $c^2 - 4ab > 0$. За стандартних параметрів a, b, c маємо $c^2 - 4ab = 32.49 - 0.16 = 32.33 > 0$, тобто

обидві рівноваги існують. При порушенні цієї умови розроблений програмний комплекс автоматично інформує користувача про відсутність дійсних стаціонарних точок.

Тип рівноваг визначається за власними значеннями матриці Якобі. В обох точках наявні власні значення з додатною дійсною частиною, тому рівноваги є нестійкими (сідло-фокусами). Унаслідок цього фазові траєкторії здійснюють обертальний рух в околі рівноваги та поступово віддаляються від неї, залишаючись у скінченній області фазового простору, що приводить до формування обмеженої інваріантної множини – хаотичного атратора Росслера.

Фазовий портрет системи Росслера при вибраних значеннях параметрів має вигляд спіральної структури (рис. 10), що обертається навколо області рівноваги та поступово зміщується в просторі фазових координат. Траєкторія не повторює попередні витки і щільно заповнює обмежену область фазового простору, що характерно для хаотичного режиму. На відміну від атратора Лоренца з його дволопатевою геометрією, атратор Росслера має виражену спіральну організацію з переважно однобічним обертанням навколо нестійкої рівноваги, що відображає різницю у механізмах формування хаосу в цих двох системах.

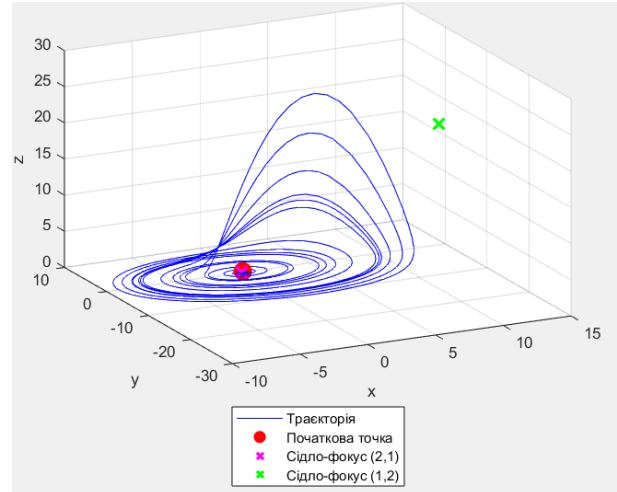


Рис. 10 – Фазовий портрет системи Росслера, з позначеними особливими точками при $a = 0,2, b = 0,2, c = 5,7$

Для детальнішого аналізу побудовано переріз Пуанкаре. Як площину перерізу обрано $y = 0$, причому враховувалися перетини з однаковим напрямком руху траєкторії.

Отримана множина точок утворює витягнуту нерегулярну область без ознак періодичності (рис. 11).

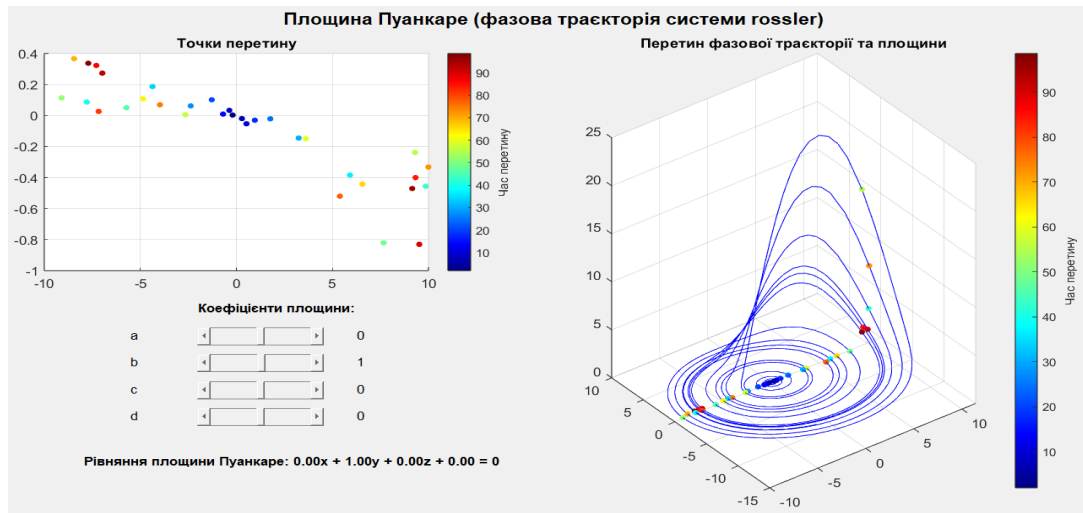


Рис. 11 – Переріз Пуанкаре системи Росслера $a = 0,2, b = 0,2, c = 5,7$

На основі послідовності точок перетину побудовано карту повернення та рекурентну діаграму. Отримані залежності мають нерегулярний характер: точки розміщені нерівномірно, без утворення скінченної

множини або замкненої кривої, що свідчить про аперіодичний характер руху.

Рекурентна діаграма містить короткі діагональні відрізки та розриви, що узгоджується з хаотичним режимом руху (рис. 12).

Система: rossler | Параметри: a=0.200, b=0.200, c=5.700

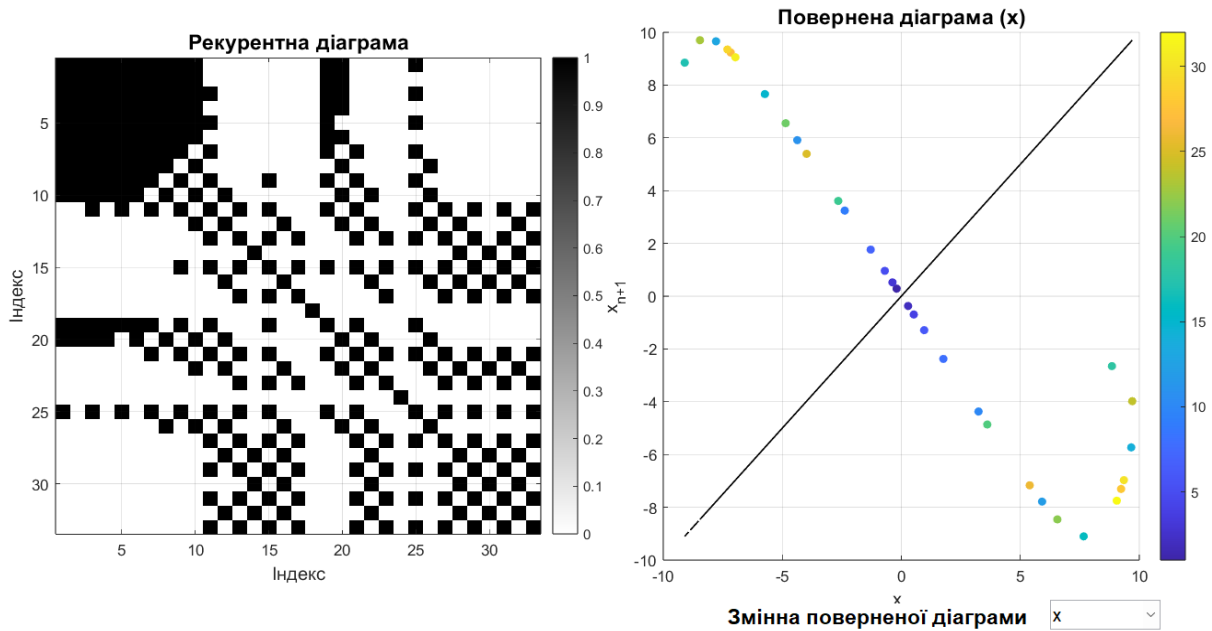


Рис. 12 – Карта повернення та рекурентна діаграма системи Росслера

Висновки

У роботі досліджено можливості графічних методів аналізу фазових траєкторій неперервних дисипативних динамічних систем на прикладі класичних моделей Лоренца та Росслера. Показано, що комплексне застосування фазових портретів, перерізів Пуанкаре, карт повернення та рекурентних діаграм дозволяє якісно ідентифікувати переходи між стаціонарними, періодичними і хаотичними режимами.

Встановлено, що для системи Лоренца зміна керуючого параметра r приводить до послідовної перебудови динаміки – від збіжності траєкторій до особливої точки до виникнення дивного атратора. Аналіз особливих точок показав їх нестійкість, що зумовлює переміщення траєкторії між областями фазового простору. Для системи Росслера отримано аналогічні ознаки хаотичної поведінки, що підтверджує відтворюваність результатів для різних нелінійних моделей.

Показано, що переріз Пуанкаре, карта повернення та рекурентна діаграма, побудовані для одного чисельного розв'язку, утворюють взаємоузгоджену систему геометричних індикаторів, яка дозволяє відрізнити хаотичний режим від регулярного без використання кількісних показників складності.

Порівняння двох систем виявило як спільні риси (обмеженість траєкторій, наявність фрактальних структур у перерізах Пуанкаре, відсутність довготривалої повторюваності), так і відмінності геометричної організації атраторів. Рекурентні діаграми для обох систем підтверджують складну внутрішню структуру хаотичної динаміки.

Наукова новизна роботи полягає у систематизованій програмній реалізації комплексу взаємодоповнювальних графічних методів дослідження нелінійної динаміки в межах єдиного інструментального середовища. Розроблений інтегрований програмний комплекс у середовищі MATLAB забезпечує узгоджене виконання чисельного інтегрування, побудову фазових характеристик і їх інтерпретацію, що підвищує відтворюваність та наочність дослідження.

Отримані результати показують, що поєднання класичних геометричних методів із рекурентним аналізом є ефективним засобом діагностики складної динаміки та може бути застосоване до інших моделей із хаотичною поведінкою. Практична значущість полягає у можливості використання запропонованого підходу як універсального інструмента для дослідження широкого класу нелінійних динамічних систем, а також у навчальних і науково-дослідних задачах, пов'язаних із аналізом складної поведінки моделей. Розроблений програмний комплекс містить також інструментарій для побудови біфуркаційних діаграм при варіюванні параметрів у заданих діапазонах, що створює основу для подальшого дослідження сценаріїв переходу до хаосу.

Перелік використаних джерел

- [1] Strogatz S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2018. 505 p.
- [2] Alligood K. T., Sauer T. D., Yorke J. A. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. New York : Springer, 1996. 603 p.

- [3] Kuznetsov Y.A. Elements of Applied Bifurcation Theory. 3rd ed. New York : Springer, 2013. 485 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0739-7>.
- [4] Eliašová I., Fečkan M. Poincaré map for discontinuous fractional differential equations. *Mathematics*. 2022. Vol. 10, no. 23. Article 4476. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10234476>.
- [5] Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*. 1987. Vol. 4, No. 9. Pp. 973–977. DOI: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/4/9/004>.
- [6] Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data / N. Marwan et al. *Physical Review E*. 2002. Vol. 66. Article 026702. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.026702>.
- [7] Recurrence plots for the analysis of complex systems / Marwan N., Romano M.C., Thiel M., Kurths J. *Physics Reports*. 2007. Vol. 438, no. 5–6. Pp. 237–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.11.001>.
- [8] Influence of observational noise on the recurrence quantification analysis / M. Thiel et al. *Physica D*. 2002. Vol. 171. Pp. 138–152. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(02\)00586-9](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(02)00586-9).
- [9] Marwan N., Kraemer K. H. Trends in recurrence analysis of dynamical systems. *The European Physical Journal Special Topics*. 2023. Vol. 232. Pp. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-022-00739-8>.
- [10] Complex network approaches to nonlinear time series analysis / Y. Zou et al. *Physics Reports*. 2019. Vol. 787. Pp. 1–97. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.10.005>.
- [11] Unified functional network and nonlinear time series analysis for complex systems science: The pyunicorn package / J. F. Donges et al. *Chaos*. 2015. Vol. 25, no. 11. Article 113101. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4934554>.
- [12] Datseris G. DynamicalSystems.jl: A Julia software library for chaos and nonlinear dynamics. *Journal of Open Source Software*. 2018. Vol. 3, no. 23. Article 598. DOI: <https://doi.org/10.21105/joss.00598>.
- [13] Numerical computation of bifurcations in large equilibrium systems in MATLAB / D. Bindel et al. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2014. Vol. 261. Pp. 354–372. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.10.034>.
- [14] Methods of continuation and their implementation in the COCO software platform with application to delay differential equations / Ahsan Z., Dankowicz H., Li M., Sieber J. *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 107. Pp. 3759–3780. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06841-1>.
- [15] Кіріченко Л. О., Степаненко Є. Д., Яндуков Д. Є. Класифікація часових рядів із використанням рекурентних діаграм. *Системні технології*. 2021. № 5(136). С. 85–94. DOI: <https://doi.org/10.34185/1562-9945-5-136-2021-08>.
- [16] Графов В. В., Лупаренко О. В., Козлов М. А. Візуалізація та дослідження неперервних динамічних систем у середовищі MATLAB. *Грааль науки*. 2024. № 38 (квітень). С. 200–205. DOI: <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.12.04.2024.034>.

GRAPHICAL METHODS FOR INVESTIGATING PHASE TRAJECTORIES OF CONTINUOUS DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEMS IN THE MATLAB ENVIRONMENT

Luparenko O.V. PhD (Engineering), associate professor, SHEI «Priazovskyi state technical university», Dnipro, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-3005-0531>, e-mail: luparenko_e_v@pstu.edu

The paper deals with the qualitative investigation of complex dynamics in continuous dissipative dynamical systems, for which an analytical description of the global behavior of trajectories is generally difficult or impossible. The relevance of the study is determined by the growing need for reliable visual analysis tools capable of revealing the phase structure of three-dimensional nonlinear models widely used in natural sciences, engineering, and applied mathematics. The purpose of the work is to systematize and implement a unified set of graphical methods for studying phase trajectories of dissipative systems in the MATLAB environment and to evaluate their informativeness for identifying different dynamical regimes. The research is based on numerical integration of autonomous systems of first-order ordinary differential equations together with graphical phase-analysis techniques. The applied approaches include construction of phase portraits, Poincaré sections, return maps, recurrence plots, and visualization of equilibrium states. A specially developed integrated software tool with a graphical user interface provides coordinated numerical experimentation and simultaneous computation of phase-space indicators within a single computational environment. The obtained results demonstrate that the combined use of graphical methods provides qualitative identification of stationary, periodic, and chaotic regimes. The approach enables identification of attractor structures, analysis of their geometric properties, and observation of transitions between regimes caused by parameter variation. The effectiveness of the proposed methodology is illustrated using the classical Lorenz and Rössler models. The scientific novelty lies in the integration and coordinated application of

several graphical phase-analysis methods within one software environment, which makes it possible to interpret different visual indicators of dynamics simultaneously. The practical significance consists in the applicability of the developed approach to a wide class of nonlinear systems and in improving reproducibility of computational experiments. Further research is associated with combining visual diagnostics with quantitative characteristics of chaotic dynamics, including entropy-based and stability measures.

Keywords: dissipative dynamical system; phase space; phase trajectories; graphical analysis methods; Poincaré section; return map; recurrence analysis; chaotic attractor; nonlinear dynamics; MATLAB.

References

- [1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2nd ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2018.
- [2] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. New York, NY, USA: Springer, 1996.
- [3] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd ed. New York, NY, USA: Springer, 2013. doi: 10.1007/978-1-4612-0739-7.
- [4] I. Eliašová, and M. Fečkan, “Poincaré map for discontinuous fractional differential equations,” *Mathematics*, vol. 10, no. 23, article 4476, 2022. doi: 10.3390/math10234476.
- [5] J.-P. Eckmann, S. O. Kamphorst, and D. Ruelle, “Recurrence plots of dynamical systems,” *Europhysics Letters*, vol. 4, no. 9, pp. 973–977, 1987. doi: 10.1209/0295-5075/4/9/004.
- [6] N. Marwan, N. Wessel, U. Meyerfeldt, A. Schirdewan, and J. Kurths, “Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data,” *Physical Review E*, vol. 66, article 026702, 2002. doi: 10.1103/PhysRevE.66.026702.
- [7] N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel, and J. Kurths, “Recurrence plots for the analysis of complex systems,” *Physics Reports*, vol. 438, no. 5–6, pp. 237–329, 2007. doi: 10.1016/j.physrep.2006.11.001.
- [8] M. Thiel, M. C. Romano, J. Kurths, R. Meucci, and E. Allaria, “Influence of observational noise on the recurrence quantification analysis,” *Physica D*, vol. 171, pp. 138–152, 2002. doi: 10.1016/S0167-2789(02)00586-9.
- [9] N. Marwan, and K. H. Kraemer, “Trends in recurrence analysis of dynamical systems,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 232, pp. 1–14, 2023. doi: 10.1140/epjs/s11734-022-00739-8.
- [10] Y. Zou, R. V. Donner, N. Marwan, J. F. Donges, and J. Kurths, “Complex network approaches to nonlinear time series analysis,” *Physics Reports*, vol. 787, pp. 1–97, 2019. doi: 10.1016/j.physrep.2018.10.005.
- [11] J. F. Donges et al., “Unified functional network and nonlinear time series analysis for complex systems science: The pyunicorn package,” *Chaos*, vol. 25, no. 11, article 113101, 2015. doi: 10.1063/1.4934554.
- [12] G. Datsiris, “DynamicalSystems.jl: A Julia software library for chaos and nonlinear dynamics,” *Journal of Open Source Software*, vol. 3, no. 23, article 598, 2018. doi: 10.21105/joss.00598.
- [13] D. Bindel, M. Friedman, W. Govaerts, J. Hughes, and Y. A. Kuznetsov, “Numerical computation of bifurcations in large equilibrium systems in MATLAB,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 261, pp. 354–372, 2014. doi: 10.1016/j.cam.2013.10.034.
- [14] Z. Ahsan, H. Dankowicz, M. Li, and J. Sieber, “Methods of continuation and their implementation in the COCO software platform with application to delay differential equations,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 107, pp. 3759–3780, 2022. doi: 10.1007/s11071-021-06841-1.
- [15] L. O. Kirichenko, Ye. D. Stepanenko, and D. Ye. Yandukov, “Klasyfikatsiia chasovykh riadiv iz vykorystanniam rekurentnykh diahram” [“Classification of time series using recurrence plots”], *Systemni tekhnologii – System Technologies*, no. 5(136), pp. 85–94, 2021. doi: 10.34185/1562-9945-5-136-2021-08. (Ukr.).
- [16] V. V. Grafov, O. V. Luparenko, and M. A. Kozlov, “Vizualizatsiia ta doslidzhennia neperervnykh dynamichnykh system u seredovyschi MATLAB” [“Visualization and investigation of continuous dynamical systems in the MATLAB environment”], *Hraal nauky – Grail of Science*, no. 38, pp. 200–205, 2024. doi: 10.36074/grail-of-science.12.04.2024.034. (Ukr.)

Стаття надійшла 12.01.2026

Стаття прийнята 20.02.2026

Стаття опублікована 26.03.2026

Цитуйте цю статтю як: Лупаренко О. В. Графічні методи дослідження фазових траєкторій неперервних дисипативних динамічних систем у середовищі MATLAB. *Вісник Приазовського державного технічного університету*. Серія: Технічні науки. 2026. Вип. 53, том 1. С. 43–53. DOI: <https://doi.org/10.31498/2225-6733.53.1.2026.359770>.