

131 ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

УДК 621.9.048.3

DOI: 10.31498/2225-6733.53.1.2026.359794

ДО ПИТАНЬ МІЦНОСТІ В СИСТЕМАХ, ЩО ВИКОНУЮТЬ ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ЛІНІЙНОГО В'ЯЗКОГО ОПОРУ

Карпенко Т.М. канд. фіз.-мат. наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Дніпро, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4042-0301>, e-mail: karpenko_t_n@pstu.edu;

Шишкін В.В. канд. техн. наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Дніпро, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5943-2180>, e-mail: shishkin_v_v@pstu.edu

Робота присвячена питанням міцності та підбору демпфуючих характеристик в механічних системах, які виконують вимушені коливання під дією періодичного збурюючого фактору в ідеальному середовищі і при наявності сил лінійного в'язкого опору. З метою дослідження напруженого стану об'єкту вивчення пропонується користуватись формулою залежності коефіцієнту динамічності від інерційних, жорсткісних, демпфуючих параметрів об'єкту та частоти збурюючої сили. При цьому, зроблені висновки: – при певному поєднанні цих параметрів амплітуда коливань (a тому – і напруження) досягають максимальних значень до настання резонансу; – для великих значень частоти збурюючого фактору напруження незначні. Надані практичні рекомендації щодо визначення величини коефіцієнту в'язкого опору, при якому: – дисипація енергії в системі буде найбільшою; – коефіцієнт запасу втомної міцності балки, на якій розташований двигун, має задану величину. Запропонований і реалізований алгоритм дій для визначення коефіцієнту запасу втомної міцності при поширених в інженерній практиці прикладах розташування двигунів з демпфером на балці і різних випадках її закріплення. При складанні диференціального рівняння руху динамічної моделі за узагальнену координату вибрана пружна деформація того перерізу балки, з яким співпадає центр ваги двигуна. Коефіцієнт жорсткості балки знайдено з тези про еквівалентність потенціальної енергії деформації балки потенціальної енергії динамічної моделі. Якщо маси балки і двигуна одного порядку, коефіцієнт зведення маси балки до узагальненої координати визначається з тези про еквівалентність кінетичної енергії балки кінетичній енергії динамічної моделі. Розглянуто приклад визначення максимальної сили або моменту, що діє на опору, де знаходиться машина з пружно-в'язкою підвіскою при виконанні вимушених коливань.

Ключові слова: вимушені коливання; коефіцієнт в'язкого опору; коефіцієнт динамічності; коефіцієнт запасу втомної міцності.

Постановка проблеми

Розвиток сучасного машинобудування характеризується зростаючими вимогами до міцності і вібростійкості об'єктів, які виконують вимушені коливання при наявності сили лінійного в'язкого опору. Зокрема, актуальними є питання щодо залежності коефіцієнту динамічності та коефіцієнту запасу втомної міцності опірної конструкції, на якій знаходиться джерело збурюючого фактору, від наступних параметрів: інерційних, жорсткісних, демпфуючих, амплітуди та частоти збурюючого фактору.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Вимушені коливання двигуна на балці розглянуті в роботах [1-4], де визначаються власні частоти та максимальні напруження в балках, як функції конструктивних параметрів та механічних характеристик балки, при різних граничних умовах кріплення балок та положення двигуна на невагомій балці і відсутності демпфера. В роботі [5-7] визначається необхідна кількість витків пружини, що тримає невірноважену машину, за умови заданої величини коефіцієнту динамічності.

Існуючі в техніці дисипативні характеристики механічних систем та коливання машин на пружних балках розглядаються в джерелах [8, 9].

Мета статті

Дослідити міцність об'єкту при вимушених коливаннях машини з балкою чи іншою опорою, з точки зору підбору: амплітуди, частоти збурюючої сили та інерційних, жорсткісних, конструктивних і демпфуючих параметрів, які забезпечать необхідний коефіцієнт динамічності чи коефіцієнт запасу втомної міцності.

Виклад основного матеріалу*Теоретичні відомості*

В техніці досить часто механічні агрегати та тіла, на яких вони закріплені, виконують вимушені коливання як в ідеальному середовищі, так і в умовах лінійного в'язкого опору. Причинами коливань можуть бути особливості технологічного процесу, наявності ексцентриситету центру мас ротора двигуна та інше. При цьому, окрім потенціальних сил, на об'єкт вивчення діє періодична збурююча сила відомої частоти.

В'язкий опір коливанням створюють сили тертя в зм'ячених кінематичних парах або в спеціально встановлених демпферах в'язкого опору, що застосовуються для зменшення напружень в елементах конструкції і в'язях. Динамічна модель (ДМ) такої механічної системи показана на Рис. 1.

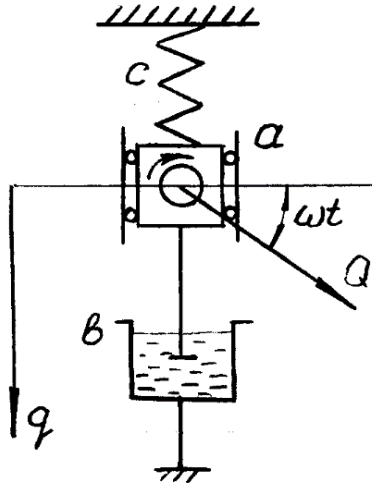


Рис. 1 – Динамічна модель механічної системи, що виконує вимушені коливання під дією періодичної збурюючої сили, з демпфером лінійного в'язкого опору

Розглянемо випадки, коли сила в'язкого опору дорівнює похідній по узагальненій швидкості від дисипативної функції Рейля. Диференціальне рівняння руху об'єкту вивчення складемо, скориставшись рівнянням Лагранжу II-го роду [10, 11]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q_i^{z\phi},$$

де $T = \frac{1}{2} a \cdot \dot{q}^2$ – кінетична енергія, a – коефіцієнт інерції;

$\Pi = \frac{1}{2} c \cdot q^2$ – потенціальна енергія, c – коефіцієнт жорсткості;

$\Phi = \frac{1}{2} b \cdot \dot{q}^2$ – дисипативна функція, b – коефіцієнт в'язкого опору;

$Q^{z\phi} = H \cdot \sin \omega t$ – узагальнена збурююча сила.

Маємо диференціальне рівняння руху об'єкту

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \cdot \sin \omega t, \quad (1.1)$$

де q – узагальнена координата; $2n = \frac{b}{a}$,

$$k^2 = \frac{c}{a}, \quad h = \frac{H}{a}.$$

За узагальнену координату візьмемо переміщення того перерізу балки, з яким співпадає центр ваги двигуна або іншого агрегату, що генерує збурюючу силу.

Якщо маси балки і машини, що на ній знаходиться, одного порядку, треба при побудові динамічної моделі об'єкту знати коефіцієнт зведення маси балки λ .

Застосувавши тезу про еквівалентність кінетичної енергії балки довжиною l , кінетичній енергії ДМ, центр мас якої знаходиться в перерізі балки l_1 і, скориставшись гіпотезою про те, що динамічні деформації змінюються по тому ж закону, що й статичні, маємо:

$$\frac{1}{2} \int_{m_0} y^2 dm = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot m_0 \cdot v(l_1),$$

де m_0 – маса балки;

$y(x)$ – рівняння зігнутої осі балки.

Оскільки швидкість елемента балки dm прямо пропорційна переміщенню цього перерізу, маємо:

$$\frac{\dot{y}(x)}{v(l_1)} = \frac{y(x)}{y(l_1)}.$$

Тому коефіцієнт зведення маси балки дорівнює

$$\lambda = \frac{\int_0^l y^2(x) dx}{l \cdot y^2(l_1)}. \quad (1.2)$$

Скориставшись тезою про еквівалентність потенціальної енергії згинної деформації балки потенціальної енергії ДМ, розташованій в перерізі l_1 , та рівнянням $y(x)$, коефіцієнт жорсткості c знаходимо з формули

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot y^2(l_1) = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^l E^2 I^2 (y''(x))^2 dx$$

$$c = \frac{E \cdot I \cdot \int_0^l (y''(x))^2 dx}{y^2(l_1)}. \quad (1.3)$$

Для проектувальників та експлуатаційників даної механічної системи важливими, зокрема, можуть бути питання:

- уникнення білярезонансних режимів коливань;
- підбору коефіцієнта b , який забезпечить найбільшу дисипацію сил опору;
- визначення коефіцієнту запасу втомної міцності балки, або інших застосованих в механічній системі в'язей.

Відповіді на ці питання можна отримати, знаючи закон руху, тобто розв'язок диференціального рівняння (1.1). Як відомо, цей розв'язок є сумою розв'язків

$$q = B \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \delta) + A \cdot \sin(\omega t + \alpha).$$

Тут $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, де $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ – частота власних коливань.

З часом коливання з частотою k_1 зникають, бо співмножник e^{-nt} з часом наближається до нуля. Тобто при усталеному русі маємо закон

$$q = A \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.4)$$

де амплітуда вимушених коливань дорівнює

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad (1.5)$$

де $h = \frac{H}{a}$.

Максимальні напруження в тілах, на які опирається двигун, прямо пропорційні амплітуді коливань. Замість того, щоб аналізувати залежність напружень від параметрів об'єкту a, b, c, ω, H , розглянемо залежність коефіцієнту динамічності K_0 від цих параметрів. K_0 дорівнює відношенню деформації, що виникла під дією Q^{36} , до деформації, яка виникає під дією сили, що дорівнює H . Тому коефіцієнт динамічності дорівнює

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4d^2z^2}}, \quad (1.6)$$

де коефіцієнт розладнання $z = \frac{\omega}{k}$, $d = \frac{n}{k}$.

Максимуму K_0 досягає тоді, коли $f(z) = (1-z^2)^2 + 4d^2z^2$ буде мінімальною. Прирівнявши похідну $f'(z)$ нулеві, з'ясуємо, що це відбувається при значенні $z_1 = \sqrt{1-2d^2}$, бо друга похідна $f''(z_1) > 0$.

Маємо висновок: при умові $b < \sqrt{2 \cdot a \cdot c}$ амплітуда досягає максимуму для значень $\omega^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a^2}$, тобто до настання резонансу (коли $\omega = k = \sqrt{\frac{c}{a}}$). На рисунку 2 зображена залежність коефіцієнту динамічності K_0 від z при різних значеннях параметру d , який залежить від коефіцієнту опору b , оскільки $b = 2d \cdot \sqrt{a \cdot c}$.

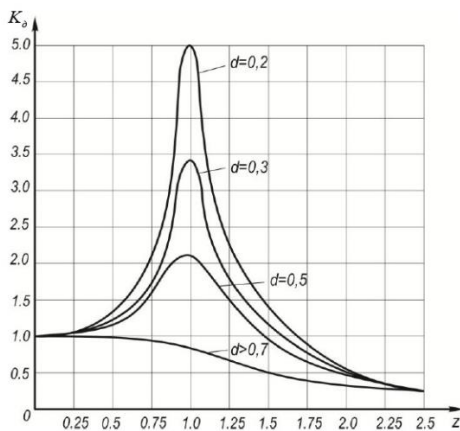


Рис. 2 – Залежність коефіцієнту динамічності K_0 від z при різних значеннях коефіцієнту опору b

Маємо:

1) сила опору має суттєвий вплив на максимальні напруження в тридцятивідсотковій білярезонансній зоні;

2) для великих значень швидкості ω напруження незначні.

Враховуючи те, що $z = \omega \cdot \sqrt{\frac{a}{c}}$, $d = \frac{b}{2 \cdot \sqrt{a \cdot c}}$ замість формули (1.6) маємо формулу залежності коефіцієнту динамічності від параметрів a, b, c, ω :

$$K_0 = \frac{c}{\sqrt{(c - \omega^2 a)^2 + \omega^2 b^2}}. \quad (1.7)$$

Як відомо [12-15], при циклічному навантаженні об'єкту важливим є коефіцієнт запасу втомної міцності, який у випадку зміни напружень за симетричним циклом дорівнює:

$$n_\sigma = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{сер}}{\sigma_m}}, \quad (1.8)$$

де σ_a – амплітудне напруження;

σ_{-1} – межа витривалості матеріалу;

$\sigma_{сер}$ – середнє напруження від сили ваги двигуна;

σ_m – границя міцності матеріалу.

Для знаходження $\sigma_{сер}$ треба застосувати формулу

$$\sigma_{сер} = \frac{M_{3z}(\bar{P})}{W_x}, \quad (1.9)$$

де $M_{3z}(\bar{P})$ – значення згинального моменту в перерізі, що співпадає з узагальненою координатою, від дії сили ваги двигуна $\bar{P} = m_{об} \cdot \bar{g}$;

W_x – осьовий момент опору перерізу.

$$\sigma_a = K_0 \cdot \sigma_{cm}, \quad (1.10)$$

де $\sigma_{cm} = \frac{M_{3z}(\bar{H})}{W_x}$.

Тобто значення σ_{cm} визначається за формулою (1.9), якщо замість сили \bar{P} на балку буде діяти сила, яка дорівнює \bar{H} – амплітуді збурюючої сили.

Приклади

Приклад 1.

Двигун (Рис. 3) масою m_1 закріплений жорстко на станині, маса якої m_2 . Центр маси ротору m_0 знаходиться на відстані e від осі обертання ротору. Між станиною і фундаментом є шар мастила, коефіцієнт в'язкості якого b . Станина закріплена двома пружинами, загальна жорсткість пружин c . Треба визначити коефіцієнт b_* , при якому дисипація енергії буде найбільшою при рівномірному обертанні ротору з кутовою швидкістю ω .

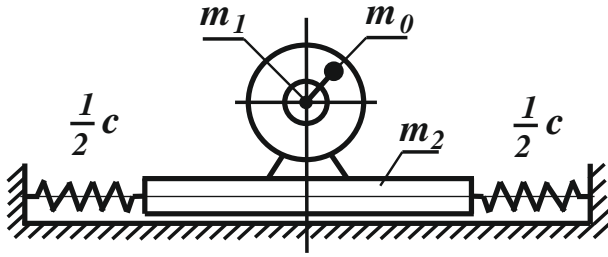


Рис. 3 – Схема до розрахунку вимушених затухаючих коливань станини з двигуном в горизонтальній площині

Розв'язання.

За узагальнену координату вибираємо переміщення центру мас системи, яке відраховуємо від положення статичної рівноваги. Збуджуюча узагальнена сила дорівнює $F_{зб} = H \cdot \sin \omega t$, де $H = m_0 \cdot \omega^2 \cdot e$. Диференціальне рівняння руху (1.1) має вигляд

$$\ddot{x} + 2 \cdot n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = h \cdot \sin \omega t,$$

де $2n = \frac{b}{m_1+m_2}$, $k^2 = \frac{c}{m_1+m_2}$, $h = \frac{m_0 \cdot \omega^2 \cdot e}{m_1+m_2}$.

Згідно (1.4) та (1.5), маємо закон усталеного руху

$$x = \frac{h \cdot \sin(\omega t + \alpha)}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}}.$$

Щоб визначити коефіцієнт в'язкого опору b_* , знайдемо роботу сил опору $A_{мер}$, як функцію параметру b . За один період коливань $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ розсіяна енергія дорівнює

$$A_{мер} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b \cdot \dot{x}^2 \cdot dt = \frac{b \cdot h^2 \cdot \pi \cdot \omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}. \quad (2.1)$$

Значення коефіцієнту b_* знайдемо з умови рівності нулеві похідної від роботи сили тертя, тобто $\frac{dA_{мер}}{db} = 0$. Після диференціювання (2.1) по b , і враховуючи, що $n = \frac{b}{2a}$, отримаємо $(k^2 - \omega^2)^2 - b_*^2 \cdot \frac{\omega^2}{a^2} = 0$. Звідки маємо відповідь

$$b_* = \frac{|c - a\omega^2|}{\omega}. \quad (2.2)$$

В даному випадку $a = m_1 + m_2$.

Приклад 2.

На балках, схеми яких показані в Таблиці 1, розташований двигун, на який діє періодична збуджуюча сила $F_{зб}$. Амплітуда сили дорівнює H , кутова швидкість обертання ротора ω . Для зменшення напруженого стану балки під двигуном розміщено демпфер, коефіцієнт лінійного в'язкого опору якого дорівнює b . Відомі маси: двигуна – $m_{об}$, ротора – m_p , балки – m_b .

При складанні динамічного рівняння руху об'єкту вивчення за узагальнену координату вибраний прогин «у» того перерізу балки, з яким співпадає вісь симетрії двигуна.

Виходячи з тези про еквівалентність потенціальної енергії пружних деформацій об'єкту і потенціальної енергії ДМ, отримані коефіцієнти жорсткості c , що розташовані в другому стовпчику Табл.1. Для схем 5 і 6 балки вважаються жорсткими.

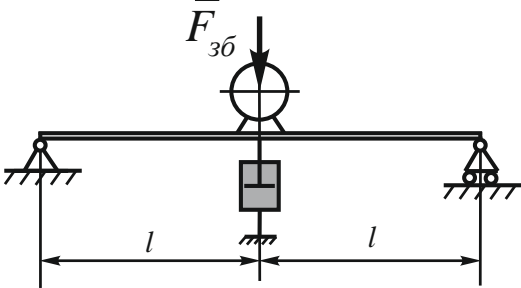
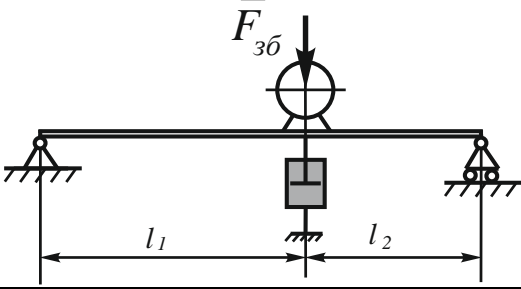
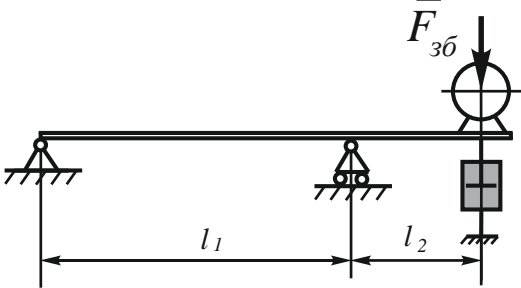
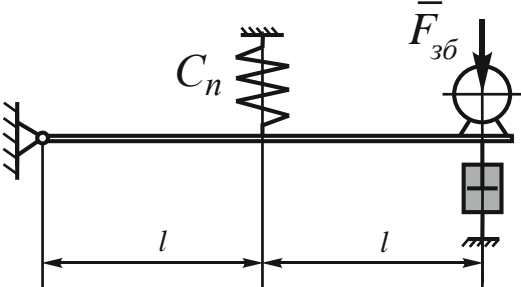
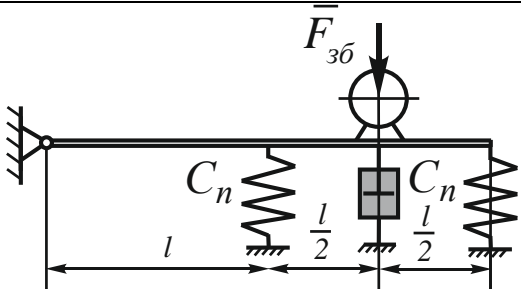
Виходячи з тези про еквівалентність кінетичної енергії об'єкту вивчення кінетичній енергії ДМ, отримані коефіцієнти інерції a , що показані в третьому стовпчику Табл.1. В схемах 3, 4, 5, 6 в коефіцієнтах інерції маса балки не врахована.

Таблиця 1

Коефіцієнти жорсткості і інерції для деяких розрахункових схем балок

№ з/п	Схема	Коефіцієнт жорсткості	Коефіцієнт інерції
1		$c = \frac{3}{8} \cdot \frac{EI_x}{l^3}$	$a = m_0 + \frac{33}{140} \cdot m_b$

Продовження таблиці 1

№ з/п	Схема	Коефіцієнт жорсткості	Коефіцієнт інерції
2		$c = 6 \cdot \frac{EI_x}{l^3}$	$a = m_\delta + \frac{17}{35} \cdot m_\delta$
3		$c = 3 \cdot \frac{EI_x \cdot (l_1 + l_2)}{l_1^2 \cdot l_2^2}$	$a = m_\delta$
4		$c = 3 \cdot \frac{EI_x}{l_2^2 \cdot (l_1 + l_2)}$	$a = m_\delta$
5		$c = \frac{c_n}{4}$	$a = m_\delta$
6		$c = \frac{20}{9} \cdot c_n$	$a = m_\delta$

Мета – визначити коефіцієнт запасу втомної міцності балок.

Алгоритм дій при визначенні коефіцієнту запасу втомної міцності балок, наведених в Табл.1 (з наперед визначеним коефіцієнтом b_*), представлений в Табл. 2.

Таблиця 2

Алгоритм дій при визначенні коефіцієнту запасу втомної міцності балок

Номер дії	Дано: положення двигуна на балці, маса двигуна $m_{\text{дв}}$, маса балки $m_{\text{б}}$; форма перерізу балки; I_x , W_x ; матеріал балки: E , σ_{-1} , σ_M .	Знайти (a , c – див. табл.1)
1	Дано: ω - швидкість збурюючої сили	$b_* = \frac{ c - a\omega^2 }{\omega}$
2	В залежності від схеми	$M_{3z} (m_{\text{дв}} \cdot \bar{g})$ $\sigma_{\text{сеп}} = \frac{M_{3z}(\bar{P})}{W_x}$
3	В залежності від схеми	$M_{3z} (\bar{H})$ $\sigma_{\text{см}} = \frac{M_{3z}(\bar{H})}{W_x}$
4		$\sigma_a = K_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{см}}$
5		$n_{\sigma} = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{\text{сеп}}}{\sigma_M}}$

Приклад 3.

Умова. На сталій балці (Рис. 4) закріплений двигун, який має незбалансований ротор, радіус дисбалансу e , кутова швидкість ротору ω . Балка має прямокутний перетин $b_1 \times h_1$, механічні характеристики: E , σ_M , σ_{-1} . Вертикальна збурююча сила дорівнює $F_{3\phi} = m_p \cdot \omega^2 \cdot e \cdot \sin \omega t$.

Мета. Підібрати характеристику демпфера b таку, при якій коефіцієнт запасу втомної міцності балки дорівнює 2.

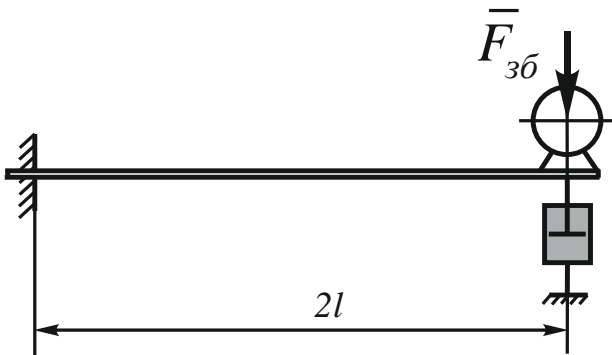


Рис. 4 – Схема балки з незбалансованим двигуном і демпфером

Дано: маси $m_{\text{б}}$, $m_{\text{дв}}$, $m_p \longrightarrow a = m_{\text{дв}} + \frac{33}{140} \cdot m_{\text{б}}$,

$H = m_p \cdot \omega^2 \cdot e$.

Балка:

$2l$, E , σ_{-1} , σ_M ; $I_x = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12}$, $W_x = \frac{b_1 \cdot h_1^2}{6} \longrightarrow c = \frac{3}{8} \cdot \frac{EI_x}{l^3}$.

Визначити: b .

Розв'язання

Згідно формули (1.8), маємо:

$$2 = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{\text{сеп}}}{\sigma_M}} \longrightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{\text{сеп}}}{\sigma_M} = \frac{1}{2} \quad (2.3)$$

Згідно формули (1.9) : $\sigma_{\text{сеп}} = \frac{m_{\text{дв}} \cdot g \cdot 12 \cdot l}{b_1 \cdot h_1^2}$,
 $\sigma_{\text{сеп}} = \frac{12 \cdot l \cdot m_p \cdot \omega^2 \cdot e}{b_1 \cdot h_1^2}$.

Згідно формул (1.7), (1.10):

$$\sigma_a = \frac{c}{\sqrt{(c - \omega^2 a)^2 + \omega^2 b^2}} \cdot \sigma_{\text{см}}$$

Невідому характеристику демпфера b знайдемо після підстановки σ_a , σ_{-1} , $\sigma_{\text{сеп}}$, σ_M в формулу (2.3).

Приклад 4. – Застосування пружно-в'язкої підвіски

Теоретичні відомості.

В інженерній практиці досить часто зустрічаються випадки, коли незбалансована машина знаходиться на жорсткій плиті, яка закріплена до опорних елементів фундаменту. При цьому, періодична збурююча сила $Q_{3\phi} = H \cdot \sin \omega t$ через плиту діє на елементи фундаменту, створюючи в них певні напруження. Якщо жорстка плита розміщена на пружних елементах (наприклад, пружинах) і може виконувати тільки вертикальні коливання, власну частоту об'єкту легко знайти при відомій сумарній жорсткості пружин та вазі двигуна з плитою. При цьому, якщо застосовуються сталеві пружини, непружний опір майже відсутній. Якщо застосовуються засоби демпфування з використанням високомолекулярних сполук або матеріалів з високим коефіцієнтом розсіювання внутрішньої енергії при деформуванні (гумові, еластомірні, поліуретанові, пробкові прокладки, тощо), коливання відбуваються в умовах в'язкого опору. Саме такі матеріали застосовують, наприклад, в поглинаючих апаратах залізничних вагонів, де треба забезпечити найскоріше припинення коливань.

Будемо вважати, що сила в'язкого опору підвіски пропорційна швидкості коливань. Ці умови можна змоделювати за допомогою комбінації ідеально пружних пружин та гідравлічного амортизатора (демпфера), як показано на Рис. 1. В умовах в'язкого опору найбільша сила, що буде діяти на фундамент з боку

демпфера, може бути визначена за формулою, яка наведена в роботі «Коливання в інженерній справі», С.П. Тимошенко

$$F\delta\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{\omega}{k^2}\right)^2}_{max}, \quad (2.4)$$

де H – амплітуда збурюючої сили, a – коефіцієнт інерції, b – коефіцієнт в'язкого опору, k – власна частота, ω – частота збурюючої сили.

Коефіцієнт динамічності, згідно формули (1.6), дорівнює

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a} \frac{\omega}{k^2}\right)^2}}. \quad (2.5)$$

Якщо пружини вибрані так, що власна частота об'єкту вивчення у порівнянні з частотою збурюючої сили невелика (тобто відношення $\frac{\omega}{k}$ – велике), амплітуда вимушених коливань буде малою (про це свідчать графіки Рис. 2) в порівнянні з переміщеннями, які виникли при статичній дії сили $Q_{зб}$.

Визначена сила F_{max} дозволяє виконати розрахунки на міцність як самих вузлів демпфування, так і опорних елементів фундаменту.

Умова задачі

При роботі однофазного генератора, електричні сили створюють змінний крутний момент, що залежить від кутової швидкості ротора

$$M = M_0 + M_1 \cdot \sin \omega t,$$

де ω – кутова швидкість ротора, t – час;
 M_0, M_1 – постійні величини.

Статор генератору (Рис. 5) бічними лапами спирається на опорні елементи фундаменту. Реакції опор можна знайти, розглянувши дію постійного і змінного моментів окремо. В обох випадках отримані реакції будуть створювати відповідні пари сил, що протидіють активним моментам.

При дії постійного моменту M_0 реакції опор можна визначити з рівнянь рівноваги статички. Ця статична складова реакцій не змінюється з часом.

При дії змінного моменту $M_1 \cdot \sin \omega t$ статор буде виконувати вимушені обертальні коливання, які призведуть до появи динамічних складових реакцій. Проте, для довільного моменту часу завжди буде виконуватись правило – активний момент урівноважується моментом сил реакцій.

Повне навантаження на опори і відповідно реакції є сумою статичних і динамічних складових.

Для зниження рівня динамічних навантажень опорні вузли машини окрім пружних елементів можуть забезпечуватись демпферами в'язкого опору. Тоді, при розв'язанні задачі, основною проблемою є

визначення навантаження, з яким машина діє на опору при наявності демпфера.

Спробуємо визначити це навантаження, використовуючи підходи, запропоновані вище.

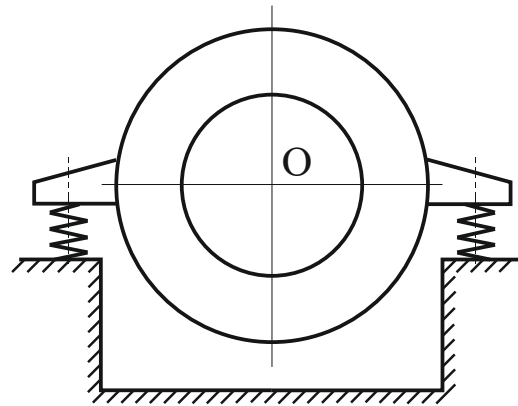


Рис. 5 – Генератор на пружно-в'язких опорах

Будемо вважати, що сила реакції пружин складається з двох частин: пружної, пропорційної деформації пружин, та сили демпфування, пропорційної швидкості. Якщо позначити через φ кут повороту статора при коливаннях, маємо, згідно рівняння Лагранжа II роду, диференціальне рівняння руху

$$I \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + c \cdot \varphi = M_1 \cdot \sin \omega t, \quad (2.6)$$

де I – момент інерції статора; b – момент пари сил в'язкого опору при кутовій швидкості, що дорівнює одиниці; c – коефіцієнт жорсткості, який виражає крутний момент, що забезпечує кут повороту статора на один радіан.

Використовуючи позначення, прийняті в рівнянні (1.1) $2n = \frac{b}{I}$, $k^2 = \frac{c}{I}$, $h = \frac{M_1}{I}$, замість (2.6) маємо:

$$\ddot{\varphi} + 2n \cdot \dot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = h \cdot \sin \omega t.$$

Після розв'язку рівняння маємо можливість знайти максимальний крутний момент, з яким генератор, навантажений змінним моментом $M_1 \cdot \sin \omega t$, діє на опори при встановлених демпферах в'язкого опору.

Величина цього моменту згідно (2.4) дорівнює

$$M_{max} = \frac{M_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{I} \frac{\omega}{k^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{I} \frac{\omega}{k^2}\right)^2}}. \quad (2.7)$$

Відомі моменти M_0 та M_{max} дозволять визначити повні максимальні реакції опор генератору з подальшим аналізом міцності опорних вузлів і елементів фундаменту.

Висновки

1) Запропонований і реалізований на прикладах коливань двигуна на вагомій балці алгоритм визначення коефіцієнту втомної міцності при попередньо вибраному коефіцієнту в'язкого опору демпфера, що забезпечує найбільшу дисипацію енергії.

2) Максимальні значення сили та крутного моменту, які діють при вимушених коливаннях на опорі, де знаходиться машина з пружно-в'язкою підвіскою, знайдені як функції інерційних, жорсткісних, демпфуючих параметрів об'єкту та частоти і амплітуди збурюючого фактору.

Перелік використаних джерел

- [1] Бейгул О. О., Колеснік І. А. Динаміка та міцність машин : навчальний посібник. Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2011. 120 с.
- [2] Laura P. A. A., Filipich C. P., Cortinez V. H. Vibrations of beams and plates carrying concentrated masses. *Journal of Sound and Vibration*. 1987. Vol. 117, № 3. Pp. 459–465. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(87\)80065-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(87)80065-2).
- [3] Effect of concentrated masses with rotary inertia on vibrations of rectangular plates / Amabili M., Pellegrini M., Righi F., Vinci F. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 295, № 1-2. Pp. 1–12. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.11.035>.
- [4] Чихладзе Е. Д., Берестянська С. Ю., Лисяков І. М. Динамічні розрахунки конструкцій : підручник. Харків: Укр.ДУЗТ, 2015. 161 с.
- [5] Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: навч. посібник / Устенко О. В., Візньак Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В. Харків: Укр. ДУЗТ, 2021. 129 с.
- [6] Boresi A. P., Schmidt R. J. *Advanced mechanics of materials*. 6th ed. New York: Wiley, 2002. 704 p.
- [7] Bokaian A. Natural frequencies of beams under compressive axial loads. *Journal of Sound and Vibration*. 1988. Vol. 126, № 1. Pp. 49–65. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(88\)90397](https://doi.org/10.1016/0022-460X(88)90397).
- [8] Механіка віброактивності та віброзахисту машин : навч. посібник / Огурцов А. П., Мамаєв Л. М., Скрипник Е. Т., Зінченко В. І. Київ : НМЦ ВОіНУ, 2002. 368 с.
- [9] Inman D. J. *Engineering vibration*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2009. 669 p.
- [10] Коливання неконсервативних механічних систем : монографія / Бабенко А. Є., Боронко О. О., Лавренко Я. І., Трубачев С. І. Київ : Нац. техн. ун-т України «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2020. 153 с.
- [11] Meirovitch L. *Methods of analytical dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1970. 524 p.
- [12] Пекельний М. І., Дібор О. Г. Розрахунок на міцність при дії повторно-змінного навантаження : учбовий посібник. Харків: Нац. аерокосм. ун-т, Харківський авіац. інститут, 2004. 74 с.
- [13] Suresh S. *Fatigue of materials*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 180 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511806575>.
- [14] Dowling N. E., Kampe S. L., Kral M. V. *Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture and fatigue*. 5th ed., global ed. Harlow: Pearson, 2020. 964 p.
- [15] Pook L. *Metal fatigue: what it is, why it matters*. *Solid Mechanics and Its Applications*. Dordrecht: Springer, 2007. 271 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5597-3>.

ON STRENGTH ISSUES IN SYSTEMS PERFORMING FORCED VIBRATIONS IN THE PRESENCE OF LINEAR VISCOUS RESISTANCE

Karpenko T.M.

PhD (Physics and Mathematical Sciences), associate professor, SHEI «Priazovskiy state technical university», Dnipro, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4042-0301>, e-mail: karpenko_t_n@pstu.edu;

Shishkin V.V.

PhD (Engineering), associate professor, SHEI «Priazovskiy state technical university», Dnipro, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5943-2180>, e-mail: shishkin_v_v@pstu.edu

The work is devoted to the issues of strength and selection of damping characteristics in mechanical systems that perform forced oscillations under the action of a periodic disturbing factor in an ideal environment and in the presence of linear viscous resistance forces. In order to study the stressed state of the object of study, it is proposed to use the formula for the dependence of the dynamic coefficient on the inertial, stiffness, damping parameters of the object and the frequency of the disturbing force. At the same time, the conclusions are made: - with a certain combination of these parameters, the amplitude of the oscillations (and therefore the stresses) reach maximum values before resonance; - for large values of the frequency of the disturbing factor, the stresses are insignificant. Practical recommendations are given for determining the value of the viscous resistance coefficient at which: - energy dissipation in the system will be the greatest; - the fatigue strength reserve coefficient of the beam on which the engine is located has a given value. An algorithm of actions for determining the fatigue strength reserve factor for common examples of engine locations with a damper on a beam and various cases of its fastening in engineering practice is proposed and implemented. When compiling the differential

equation of motion of the dynamic model, the elastic deformation of the beam section with which the center of gravity of the engine coincides was chosen as the generalized coordinate. The beam stiffness coefficient was found from the thesis on the equivalence of the potential energy of the beam deformation to the potential energy of the dynamic model. Since the masses of the beam and the engine are of the same order, the coefficient of reducing the beam mass to the generalized coordinate is determined from the thesis on the equivalence of the kinetic energy of the beam to the kinetic energy of the dynamic model. An example is considered when the disturbing force has two components. Differential equations of motion are compiled, a frequency equation is obtained, by solving which it is possible to select the frequency of the disturbing force for the non-resonant mode. Formulas for the amplitude of forced oscillations are obtained.

Keywords: forced oscillations; viscous drag coefficient; dynamic coefficients; fatigue strength reserve coefficient.

References

- [1] O. O. Beihul, and I. A. Kolesnik, *Dynamika ta mitsnist mashyn : navchalnyi posibnyk* [Dynamics and strength of machines: a textbook]. Dniprodzerzhynsk, Ukraine; DDTU Publ., 2011. (Ukr.)
- [2] P. A. A. Laura, C. P. Filipich, and V. H. Cortínez, “Vibrations of beams and plates carrying concentrated masses,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 117, № 3, pp. 459–465, 1987. doi: [10.1016/S0022-460X\(87\)80065-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(87)80065-2).
- [3] M. Amabili, M. Pellegrini, F. Righi, and F. Vinci, “Effect of concentrated masses with rotary inertia on vibrations of rectangular plates,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 295, № 1-2, pp. 1–12, 2006. doi: [10.1016/j.jsv.2005.11.035](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.11.035).
- [4] E. D. Chykhladze, S. Yu. Berestianska, and I. M. Lysiakov, *Dynamichni rozrakhunky konstruksii : pidruchnyk* [Dynamic calculations of structures: textbook]. Kharkiv, Ukraine: Ukr.DUZT Publ., 2015. (Ukr.)
- [5] O. V. Ustenko, R. I. Vizniak, A. O. Lovska, and A. V. Rybin, *Osnovy teorii kolyvan ta stiihosti rukhomoho skladu: navch. posibnyk* [Fundamentals of the theory of vibrations and stability of rolling stock: a textbook]. Kharkiv, Ukraine: Ukr.DUZT Publ., 2021. (Ukr.)
- [6] A. P. Boresi, and R. J. Schmidt, *Advanced mechanics of materials*, 6th ed., New York: Wiley, 2002.
- [7] A. Bokaian, Natural frequencies of beams under compressive axial loads, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 126, № 1, pp. 49–65, 1988. doi: [10.1016/0022-460X\(88\)90397](https://doi.org/10.1016/0022-460X(88)90397).
- [8] A. P. Ohurtsov, L. M. Mamaiev, E. T. Skrupnyk, and V. I. Zinchenko, *Mekhanika vibroaktyvnosti ta vibrozakhystu mashyn : navch. posibnyk* [Mechanics of vibration activity and vibration protection of machines: a textbook]. Kyiv, Ukraine: NMC VOiNU, 2002. (Ukr.)
- [9] D. J. Inman, *Engineering vibration*, 3rd ed., Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2009.
- [10] A. Ye. Babenko, O. O. Boronko, Ya. I. Lavrenko, and S. I. Trubachev, *Kolyvannia nekonservatyvnykh mekhanichnykh system : monohrafiia* [Oscillations of non-conservative mechanical systems: monograph]. Kyiv, Ukraine: National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» Publ., 2020. (Ukr.)
- [11] L. Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*. New York, USA: McGraw-Hill, 1970.
- [12] M. I. Pekelnyi, and O. H. Dibor, *Rozrakhunok na mitsnist pry dii povtorno-zminnoho navantazhennia : uchbovyi posibnyk* [Strength calculation under repeated alternating loading: a training manual]. Kharkiv, Ukraine: National Aerospace University, Kharkiv Aviation Institute, 2004. (Ukr.)
- [13] S. Suresh, *Fatigue of materials*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 2012. doi: [10.1017/CBO9780511806575](https://doi.org/10.1017/CBO9780511806575).
- [14] N. E. Dowling, S. L. Kampe, and M. V. Kral, *Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture and fatigue*, 5th ed., global ed., Harlow: Pearson, 2020.
- [15] L. Pook, “Metal fatigue: what it is, why it matters,” in *Solid Mechanics and Its Applications*, Dordrecht: Springer, 2007. doi: [10.1007/978-1-4020-5597-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5597-3).

Стаття надійшла 19.02.2026
Стаття прийнята 13.03.2026
Стаття опублікована 26.03.2026

Цитуйте цю статтю як: Карпенко Т. М., Шишкін В. В. До питань міцності в системах, що виконують вимушені коливання при наявності лінійного в'язкого опору. *Вісник Приазовського державного технічного університету*. Серія: Технічні науки. 2026. Вип. 53, том 1. С. 128–136. DOI: <https://doi.org/10.31498/2225-6733.53.1.2026.359794>.