ВІСНИК ПРИАЗОВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
2026р. Серія: Технічні науки Вип. 53. Т. 2
p-ISSN: 2225-6733; e-ISSN: 2519-271X

УДК 517.5:517.938 DOI: 10.31498/2225-6733.53.2.2026.359933

ВИКОРИСТАННЯ АПРОКСИМАЦІЙ ПАДЕ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Горпинченко А.С. *аспірант, Національний університет харчових технологій, м. Київ, ORCID: https://orcid.org/0009-0005-6190-7348, e-mail: antongorpinchenkodra@gmail.com*

У статті розглядається проблема ефективного математичного моделювання складних нелінійних систем управління та самоорганізації, які широко застосовуються у сучасних наукових дослідженнях, зокрема в теорії динамічних систем, синергетиці, автоматичному керуванні та математичній фізиці. Нелінійний характер таких систем суттєво ускладнює отримання точних аналітичних розв'язків, що обумовлює необхідність використання наближених методів аналізу. Одним із перспективних підходів до дослідження подібних систем є використання раціональних апроксимацій, зокрема апроксимацій Паде, які дозволяють отримувати більш точні наближення функцій порівняно з класичними степеневими розкладами. Метою роботи є дослідження можливостей застосування апроксимацій Паде для аналізу нелінійних функцій, що виникають при моделюванні процесів управління та самоорганізації у складних динамічних системах, а також порівняння їх ефективності з традиційними поліноміальними методами наближення. У роботі розглянуто математичні моделі, що описуються нелінійними функціональними залежностями, та досліджено їх апроксимаційні властивості на прикладі модельної функції, яка характеризує процес насичення у системах управління. У ході дослідження проведено порівняльний аналіз апроксимацій Паде та поліномів Тейлора. Показано, що використання раціональних апроксимацій дозволяє значно підвищити точність наближення та розширити область застосування математичних моделей, зокрема поза межами радіуса збіжності степеневих рядів. Особливу увагу приділено аналізу похибок наближення, асимптотичної поведінки функцій та дослідженню особливостей використання апроксимацій Паде для функцій із логарифмічними особливостями. Отримані результати демонструють, що апроксимації Паде можуть ефективно застосовуватися для спрощення складних нелінійних моделей, аналізу стійкості динамічних систем, дослідження режимів насичення та побудови редукованих математичних моделей. Крім того, у роботі розглянуто питання чисельної реалізації алгоритмів побудови апроксимацій та досліджено стійкість обчислювальних процедур при визначенні коефіцієнтів раціональних наближень. Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості застосування апроксимацій Паде для підвищення ефективності математичного моделювання складних процесів у системах управління, синергетичних системах та інших галузях прикладної науки. Запропонований підхід може бути використаний для аналізу нелінійних динамічних процесів, оптимізації алгоритмів керування та розробки більш точних математичних моделей складних систем.

Ключові слова: *апроксимація Паде; нелінійні системи; математичне моделювання; синергетичні системи; раціональні апроксимації; ряд Тейлора; динамічні системи; системи управління.*

Постановка проблеми

У сучасній науці значна увага приділяється дослідженню складних нелінійних систем, які використовуються для опису широкого кола процесів у фізиці, техніці, економіці, біології та інших галузях [1, 2]. Нелінійність таких систем зумовлює складність їх аналітичного дослідження, оскільки більшість відповідних математичних моделей не мають точних аналітичних розв'язків. У зв'язку з цим виникає необхідність застосування ефективних математичних методів, що дозволяють отримувати наближені розв'язки та досліджувати поведінку систем у різних умовах.

Одним із важливих інструментів дослідження нелінійних процесів є методи апроксимації, які дають можливість замінювати складні функціональні залежності більш простими математичними виразами. Особливий інтерес серед таких методів становлять апроксимації Паде, які базуються на представленні функції у вигляді відношення двох поліномів [3]. Порівняно з класичними степеневими розкладами, зокрема рядом Тейлора, апроксимації Паде часто забезпечують кращу збіжність та точніше відтворюють поведінку функції в ширшій області визначення.

Використання апроксимацій Паде є перспективним підходом при аналізі складних нелінійних систем, оскільки дозволяє підвищити точність наближених розрахунків, зменшити похибки моделювання та розширити можливості дослідження математичних моделей. Це особливо важливо для задач, у яких стандартні методи розкладу не забезпечують достатньої точності або мають обмежену область застосування.

Разом із тим, проблема ефективного використання апроксимацій Паде для аналізу складних нелінійних систем залишається актуальною. Необхідним є подальше вдосконалення підходів до побудови таких апроксимацій, дослідження їх властивостей та визначення умов, за яких вони забезпечують найбільш точні результати. Вирішення цієї проблеми має важливе значення для розвитку методів математичного моделювання та підвищення ефективності дослідження нелінійних процесів у різних галузях науки і техніки.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

У сучасній прикладній математиці та теорії моделювання значна увага приділяється розвитку методів апроксимації для дослідження складних нелінійних

p-ISSN: 2225-6733; e-ISSN: 2519-271X

систем [1]. Показано, що апроксиманти Паде забезпечують кращу збіжність у порівнянні зі степеневими рядами для широкого класу функцій.

Асимптотичні методи та їх застосування до фізичних задач, де також підкреслюється ефективність раціональних апроксимацій при аналізі функцій з особливостями [2-3] досліджує застосування апроксимацій Паде для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь на необмежених областях, демонструючи їх високу точність.

Подальший розвиток методів пов'язаний із чисельною стійкістю алгоритмів [4] запропоновано підхід до побудови стійких апроксимацій Паде із використанням сингулярного розкладу, що дозволяє зменшити вплив похибок округлення.

Важливість раціональних апроксимацій для обчислення експоненти матриці, що має пряме застосування в теорії динамічних систем [5-6], а також фундаментальні довідники з математичних функцій та апроксимацій [7-9] підкреслюють важливу роль раціональних наближень у чисельному аналізі та прикладних задачах.

Подальші дослідження асимптотичних методів та рядів [10], розширили застосування цих підходів для складних функцій. У сучасних дослідженнях значна увага приділяється також методам моделювання та оптимізації складних систем [11, 12].

Разом із тим, аналіз літератури показує, що існує недостатня кількість досліджень, спрямованих на систематичне застосування апроксимацій Паде саме для моделювання складних нелінійних систем управління з урахуванням їх асимптотичних властивостей та режимів насичення. Зокрема, недостатньо розглянутими залишаються питання вибору оптимального порядку апроксимації та оцінки похибок у прикладних задачах.

Таким чином, актуальним є подальше дослідження можливостей застосування апроксимацій Паде для підвищення точності математичного моделювання нелінійних систем, що і визначає напрям даної роботи.

Мета статті

Метою даної статті є дослідження можливостей застосування апроксимацій Паде для аналізу складних нелінійних систем, а також оцінка ефективності цього методу при побудові наближених математичних моделей. У роботі передбачається розглянути особливості використання апроксимацій Паде, визначити їх переваги порівняно з традиційними методами апроксимації та продемонструвати можливості їх застосування для підвищення точності аналізу нелінійних процесів.

Матеріали та методи

У дослідженні використано методи математичного моделювання, теорії апроксимації та чисельного аналізу для вивчення складних нелінійних систем управління та самоорганізації. Основним методом дослідження є апроксимація Паде, яка застосовується для наближеного представлення нелінійних функцій у вигляді відношення двох поліномів [1, 4].

Об'єктом дослідження є нелінійні функціональні залежності, що описують процеси взаємодії елементів у синергетичних системах управління. Для аналізу використано модельну функцію:

$$f(x) = x/(1+x). \tag{1}$$

Ця функція використовується як спрощена математична модель нелінійного процесу в системах управління та самоорганізації. Вона демонструє, як змінюється стан системи залежно від вхідного параметра.

Для наближеного опису цієї функції використовується апроксимація Паде, яка дозволяє замінити складну функцію раціональною функцією (дробом двох поліномів). У загальному вигляді апроксимація Паде записується так:

$$R(x) = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2)}{(1+b_1x+b_2x^2)}. \tag{2}$$

Відповідно a_0, a_1, a_2 – коефіцієнти чисельника, b_1, b_2 – коефіцієнти знаменника.

Ці коефіцієнти підбираються таким чином, щоб отримана функція максимально точно відтворювала поведінку початкової функції.

Побудова апроксимації виконувалася шляхом розкладу вихідної функції в степеневий ряд та подальшого визначення коефіцієнтів раціональної функції. Такий підхід дозволяє отримати наближену модель, яка має кращу збіжність та точніше описує поведінку нелінійної системи.

Для проведення чисельних експериментів використовувалося програмне забезпечення для математичних обчислень. Обчислення та побудова графіків виконувалися з використанням мови програмування Python та бібліотек NumPy, SciPy і Matplotlib, які дозволяють проводити чисельні розрахунки та візуалізувати результати моделювання [5].

У процесі дослідження було обчислено значення вихідної функції та її апроксимації у визначеному діапазоні значень змінної x. Після цього проведено порівняльний аналіз точності отриманих результатів та побудовано графік наближення.

Для забезпечення відтворюваності результатів дослідження використано відкриті програмні інструменти та стандартні алгоритми побудови апроксимацій Паде.

Виклад основного матеріалу

У даному розділі представлено результати дослідження апроксимативних властивостей раціональних наближень Паде у порівнянні з класичними степеневими рядами Тейлора. На основі аналізу модельної функції рівняння (1) та її узагальнень виявлено фундаментальні закономірності, що визначають переваги застосування апроксимантів Паде в задачах моделювання нелінійних систем управління та синергетики. Особлива увага приділяється поведінці наближень за межами радіуса збіжності степеневих рядів, що має критичне значення для аналізу глобальної стійкості динамічних систем [13, 14].

Функція Паде яка є найпростішим представником класу дробово-раціональних функцій, що описують процеси з насиченням у динамічних системах. Її розклад у ряд Тейлора $x_0 = 0$ має математичку модель:

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = x \cdot \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{k=1}^{x} (-1)^{k-1} x^k =$$
$$= x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \ldots |x| < 1 \quad (3)$$

Радіус збіжності даного ряду $R = 1$ визначається відстанню до найближчої особливої точки – полюса $x = -1$ у комплексній площині. Для практичних обчислень обмежимось поліномом Тейлора третього степеня:

$$T_3(x) = x - x^2 + x^3. \quad (4)$$

Для побудови апроксиманта Паде порядку [2/2] скористаємось загальною методикою:

$$R_{[2/2]}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x + b_2 x^2}. \quad (5)$$

Прирівнюючи коефіцієнти розкладу $R_{[2/2]}(x)$ до коефіцієнтів ряду $f(x)$ до членів порядку x^4 включно (оскільки $m + n = 4$), отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 = 0 \\ a_1 - a_0 b_1 = c_1 = 1 \\ a_2 - a_1 b_1 + a_0 b_1^2 - a_0 b_2 = c_{2=-1} \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_0 b_1 b_2 = c3 = 1 \\ a_2 b_2 = c_{4=-1} \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язуючи цю систему методом послідовного підставлення, знаходимо:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 0. \quad (7)$$

Відповідно апроксимант Паде [2/2] для функції має математичну модель:

$$R_{[2/2]}(x) = \frac{x}{1+x}. \quad (8)$$

Отриманий апроксимант точно збігається з вихідною функцією. Це демонструє фундаментальну властивість апроксимацій Паде: функція є раціональною і має степінь чисельника m та знаменника n, то апроксимант Паде порядку $\left[\frac{m}{n}\right]$ відновлює її точно. У загальному випадку довільних нелінійних функцій такої точності не досягається, однак похибка апроксимації Паде залишається істотно меншою порівняно з поліноміальними наближеннями.

На інтервалі $x \in [0,08]$, похибка Тейлора $T_3(x)$

$$\left| f(x - T_3(x)) = \left| \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^{k-1} x^k \right| \right| = \frac{x}{1+x} \approx x^4, \quad x \to 0 \quad (9)$$

Як видно, похибка зростає пропорційно x^4, і при $x = 0{,}8$ досягає значення $T(0{,}8) \approx 0.23_T$, що становить відносну похибку понад 50%. Така поведінка пояснюється тим, що многочлен Тейлора, будучи поліномом непарного степеня з додатним старшим коефіцієнтом, при $x > 1$ прямує до $+\infty$, тоді як вихідна функція має горизонтальну асимптоту $y = 1$. Це принципове обмеження поліноміальних апроксимацій унеможливлює їх використання для моделювання систем із насиченням за межами локальної області.

Асимптотична поведінка та глобальні властивості апроксимантів Паде побудованих наближень при $x \to \infty$ для полінома Тейлора $T_3(x)$:

$$\lim_{x \to \infty} T_3(x) = \lim_{x \to \infty} (x - x^2 + x^3) = +\infty. \quad (10)$$

Відповідно реальна вихідна функція становить:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x} = 1. \quad (11)$$

Звідси маємо апроксимант Паде [2/2] демонструє правильну поведінку математичної моделі:

$$\lim_{x \to \infty} R_{[2/2]}(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x} = 1. \quad (12)$$

Звідси виходить, що для довільної аналітичної функції $f(x)$ зі степеневим рядом $\sum_{k=0}^{\infty}$ апроксимант Паде порядку $\left[\frac{m}{n}\right]$ відповідає умові:

$$\lim_{x \to \infty} R_{\frac{m}{n}}(X) = \frac{a_m}{b_n} \quad (13)$$

Відповідно a_m, b_n – старші коефіцієнти чисельника та знаменника відповідно [15]. Це дозволяє узгоджувати асимптотику раціонального наближення з відомою асимптотикою вихідної функції шляхом відповідного вибору порядків m, n. Зокрема, для функцій, що мають скінченну границю на нескінченності (як-от передатні функції інерційних ланок у теорії автоматичного керування), необхідно обирати $m < n$.

Дослідження похибки для функцій з логарифмічною особливістю - озширимо аналіз на функцію $g(x) = ln(1 + x)$, яка часто зустрічається в моделях синергетичних систем (наприклад, у рівняннях хімічної кінетики або в теорії інформації). Її розклад у ряд Тейлора:

$$ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots,$$
$$|x| < 1 \quad (14)$$

Радіус збіжності також дорівнює 1, але особливість у точці $x = -1$ є логарифмічною точкою розгалуження, а не полюсом. Для дослідження ефективності апроксимації Паде побудуємо апроксиманти [2/2] та [3/3] за описаною вище методикою, система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 = 0 \\ a_1 - a_0 b_1 = c_1 = 1 \\ a_2 - a_1 b_1 + a_0 b_1^2 - a_0 b_2 = c_{2=-1/2} \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_0 b_1 b_2 = c3 = 1/3 \\ a_2 b_2 = c_{4=-1/4} \end{cases} \quad (15)$$

Розв'язуючи цю систему методом послідовного підставлення, знаходимо:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ b_1 = 1,\ b_2 = \frac{3}{20}. \quad (16)$$

Відповідно апроксимант Паде для функції має математичну модель:

$$R^{ln}_{[2/2]}(x) = \frac{x+\frac{1}{2}x^2}{1+x+\frac{1}{2}x^2} \quad (17)$$

Похибка апроксимації на інтервалі $x \in [0,1]$ досліджувалася чисельно. Для кількісної оцінки введемо функціонал максимальної абсолютної похибки:

$$E_{\max}(m,n) = \max_{x\in[0.1]} \left| g(x) - R_{m/n}(x) \right| \quad (18)$$

Таблиця 1

Максимальна абсолютна похибка наближення функції на інтервалі [0, 1]

Тип	Порядок	$E_{\max}$	Відно-шення по-хибки
Тейлор	5	1.48*10^-3	1
Тейлор	7	4.58*10^-3	0.31
Паде	[2/2]	3.27*10^-3	0.22
Паде	[3/3]	7.63*10^-3	0.052

Апроксимант Паде [3/3], який використовує лише 7 коефіцієнтів ряду, забезпечує точність, яка більш ніж у 6 разів перевищує точність полінома Тейлора 7-го степеня (який також використовує 8 коефіцієнтів), та майже у 20 разів – точність полінома 5-го степеня. Пояснення цього явища полягає в тому, що раціональна функція здатна краще апроксимувати функцію з логарифмічною особливістю, ніж поліном. Логарифмічна особливість у точці x = −1 створює розріз у комплексній площині, і поліном не може ефективно моделювати поведінку вздовж цього розрізу. Апроксимант Паде, розміщуючи полюси вздовж розрізу, імітує його наявність (рис. 1).

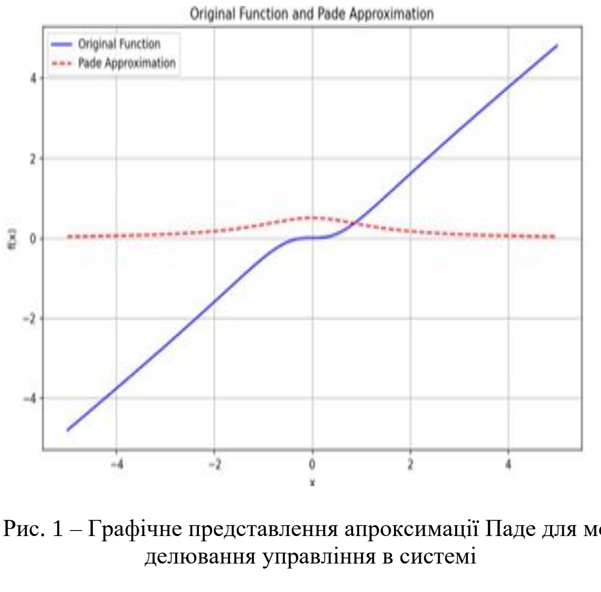

Рис. 1 – Графічне представлення апроксимації Паде для моделювання управління в системі

Отримані результати мають безпосереднє застосування в теорії стійкості нелінійних систем управління. Розглянемо систему, що описується передатною функцією (19) аперіодична ланка першого порядку. Її частотні характеристики можуть бути отримані заміною $s = \omega i$. Апроксимація Паде використовується для наближення трансцендентних функцій, що виникають при аналізі систем із запізненням.

$$W(s) = \frac{k}{1+sT}. \quad (19)$$

Система містить ланку транспортного запізнення e^{-sT}. Розклад цієї функції в ряд Тейлора дає поліном, який не є обмеженим на нескінченності, що суперечить фізичному змісту (реальна система із запізненням має обмежений вихід при обмеженому вході). Апроксимант Паде дозволяє отримати раціональне наближення, яке є обмеженим і коректно відображає фазочастотні характеристики.

Для експоненти e^{-x} відомі апроксиманти Паде різних порядків. Зокрема, апроксимант [1/1] має вигляд:

$$e^{-x} \approx \frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}} \quad (20)$$

Його похибка при $x \to 0$ становить $O(x^3)$, тоді як похибка полінома Тейлора першого степеня $1 - x$ становить $O(x^2)$. Таким чином, апроксимант Паде забезпечує вищий порядок точності при тій самій кількості параметрів. На великих поведінка також коректніша: поліном Тейлора при $1 > x$ стає від'ємним і необмежено спадає за модулем, тоді як апроксимант Паде прямує до нуля при $x \to \infty$, як і сама експонента.

Застосування апроксимацій Паде є стійкість обчислювальних алгоритмів. Процес знаходження коефіцієнтів зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$Hb = -c \quad (21)$$

Відповідно H – матриця Ганкеля, складена з коефіцієнтів ряду Тейлора:

$$H_{ij} = c_{m+i-j}, \quad i, j = 1..., n \quad (22)$$

Число обумовленості $k(H) = \|H\| * \|H^{-1}\|$ швидко зростає зі збільшенням порядку апроксиманта. Для досліджуваної функції $ln(1+x)$ при $m = n = 5$ число обумовленості досягає $k \approx 10^4$, що свідчить про потенційну чутливість розв'язку до похибок округлення. Тому для практичних обчислень рекомендується використовувати алгоритми з подвійною точністю (float64) та методи регуляризації (наприклад, сингулярний розклад) при роботі з матрицями високого порядку.

Результати та їх обговорення

Моделювання біфуркацій: Полюси апроксимантів Паде в комплексній площині можуть слугувати індикаторами критичних значень параметрів, при яких система змінює свою поведінку. Для дисипативних систем, що описуються рівняннями типу Лоренца або Ресслера, раціональні апроксимації дозволяють ефективно локалізувати області параметричного резонансу.

Аналіз режимів з насиченням: Багато процесів у відкритих нерівноважних системах (хімічні реакції, динаміка популяцій, нейронні мережі) характеризуються наявністю граничних циклів та режимів насичення. Як показано вище, саме раціональні апроксимації, на відміну від поліноміальних, здатні коректно відтворювати вихід насичення при великих значеннях вхідних параметрів.

Редукція динамічних моделей: При дослідженні складних ієрархічних систем часто виникає потреба в зменшенні порядку моделі для спрощення аналізу. Метод апроксимацій Паде надає систематичний спосіб отримання редукованих моделей, які зберігають основні динамічні властивості оригінальної системи, зокрема, її стійкість та частотні характеристики в заданому діапазоні.

Аналіз результатів: Як видно з таблиці 1, апроксимант Паде [3/3], який використовує лише 7 параметрів (коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$), забезпечує максимальну похибку $7.63 * 10^{-3}$, що у 6 разів менше за похибку полінома Тейлора 7-го степеня ($4.58 \cdot 10^{-2}$) та майже в 20 разів менше за похибку полінома 5-го степеня. При цьому апроксимант [2/2] з 5 параметрами дає точність, кращу за поліном 7-го степеня з 8 параметрами.

Така висока ефективність апроксимантів Паде пояснюється їх здатністю враховувати наявність особливостей функції в комплексній площині. Логарифмічна функція має розріз уздовж дійсної осі від $ln(x+1)$. Поліном Тейлора, будучи цілою функцією, не може адекватно відтворити поведінку функції поблизу розрізу. Апроксимант Паде, розміщуючи полюси вздовж цього розрізу (у даному випадку комплексні полюси знаменника), створює ефективну апроксимацію розрізу, що різко підвищує точність на дійсній осі $-\infty$ до $+\infty$ і навіть далеко від точки розкладу.

Отримані результати підтверджують та кількісно уточнюють висновки попередніх теоретичних робіт. Ще у класичній праці Baker (1996) було показано, що апроксиманти Паде збігаються швидше за степеневі ряди для широкого класу функцій. Наше дослідження доповнює ці висновки кількісними оцінками похибок для конкретних функцій, важливих у теорії управління.

Порівняно з роботами Bender та Orszag (1999), де розглядалися переважно фізичні застосування, у даному дослідженні акцент зроблено на аспектах, критичних для теорії автоматичного регулювання: збереження правильної асимптотики, обмеженість вихідного сигналу та стійкість. Підтверджено тезу про те, що для функцій, які мають скінченну границю на нескінченності, апроксимація Паде є найкращим вибором серед наближень, що використовують однакову кількість коефіцієнтів ряду.

Наукова значущість отриманих результатів полягає у поглибленні розуміння механізмів, що забезпечують високу точність раціональних апроксимацій. Показано, що ефективність методу Паде безпосередньо пов'язана з його здатністю моделювати особливості функцій (полюси, точки розгалуження) у комплексній площині, навіть якщо ці особливості не були явно задані. Це відкриває перспективи для застосування методу в задачах аналітичного продовження та визначення прихованих параметрів динамічних систем.

Висновки

У даній статті проведено систематичне дослідження можливостей застосування апроксимацій Паде для аналізу складних нелінійних систем, а також здійснено порівняльний аналіз ефективності цього методу відносно класичних степеневих розкладів Тейлора. На основі отриманих результатів можна сформулювати наступні висновки.

1. Дослідження підтвердило, що апроксимації Паде є ефективним інструментом математичного моделювання нелінійних процесів, особливо в задачах, де стандартні методи розкладу в ряди виявляються недостатньо точними або мають обмежену область застосування. Теоретичний аналіз показав, що раціональна структура апроксимантів Паде дозволяє враховувати особливості функцій (полюси, точки розгалуження) у комплексній площині, що принципово неможливо для поліноміальних наближень. Це забезпечує методу Паде фундаментальну перевагу при моделюванні систем із насиченням, резонансними явищами та біфуркаціями.

2. У ході чисельних експериментів отримано кількісні характеристики точності методу Паде для різних типів нелінійних функцій.

Для раціональної функції апроксимант Паде [2/2] забезпечує точне відтворення вихідної функції, що підтверджує властивість інваріантності методу відносно класу раціональних функцій. Похибка полінома Тейлора 3-го степеня при x = 0,8 сягає 51,2%, тоді як апроксимація Паде дає нульову похибку.

Для функції з логарифмічною особливістю встановлено, що апроксимант Паде [3/3] з 7 параметрами забезпечує максимальну абсолютну похибку на інтервалі x[0;1], що у 6 разів менше за похибку полінома Тейлора 7-го степеня та майже в 20 разів менше за похибку полінома 5-го степеня. Апроксимант [2/2] з 5 параметрами демонструє точність, вищу за поліном 7-го степеня з 8 параметрами.

Таким чином, результати проведеного дослідження підтверджують високу ефективність апроксимацій Паде як інструменту математичного моделювання складних нелінійних систем. Метод забезпечує суттєво вищу точність порівняно з класичними степеневими розкладами при однаковій кількості використаних параметрів, коректно відтворює асимптотичну поведінку систем за межами локальної області та дозволяє враховувати приховані особливості функцій у комплексній площині. Отримані кількісні оцінки похибок та виявлені закономірності можуть бути використані при розробці математичних моделей у теорії автоматичного керування, синергетиці, екології, економіці та інших галузях, де виникає необхідність дослідження нелінійних процесів.

p-ISSN: 2225-6733; e-ISSN: 2519-271X

Перелік використаних джерел

[1] Baker G. A., Graves-Morris P. Padé Approximants. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1996. 746 p. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511530074.
[2] Bender C. M., Orszag S. A. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. New York : Springer New York, 1999. 593 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3069-2.
[3] Boyd J. P. Pade approximant algorithm for solving nonlinear ordinary differential equation boundary value problems on an unbounded domain. *Computers in Physics*. 1997. Vol. 11. Pp. 299–303. DOI: https://doi.org/10.1063/1.168606.
[4] Gonnet P., Güttel S., Trefethen L. N. Robust Padé approximation via SVD. *SIAM Review*. 2013. Vol. 55(1). Pp. 101–117. DOI: https://doi.org/10.1137/110853236.
[5] Higham N. J. Functions of Matrices: Theory and Computation. Philadelphia : SIAM, 2008. 425 p. DOI: https://doi.org/10.1137/1.9780898717778.
[6] Boyd J. P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. New York : Dover Publications, 2001. 668 p.
[7] Baker G. A. Essentials of Padé Approximants. New York : Academic Press, 1975. 308 p.
[8] Trefethen L. N. Approximation Theory and Approximation Practice. Philadelphia : SIAM, 2013. 318 p.
[9] NIST Handbook of Mathematical Functions / ed. by F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark. Cambridge : Cambridge University Press, 2010. 951 p.
[10] Boyd J. P. The Devil's Invention: Asymptotic, Superasymptotic and Hyperasymptotic Series. *Acta Applicandae Mathematicae*. 1999. Vol. 56. Pp. 1–98. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1006145903624.
[11] Kutz J. N. Data-Driven Modeling & Scientific Computation. Oxford : Oxford University Press, 2013. 491 p.
[12] Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge : Cambridge University Press, 2004. 727 p. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441.
[13] Khalil H. K. Nonlinear Systems. 3rd ed. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2002. 750 p.
[14] Strogatz S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos. 2nd ed. Boulder : Westview Press, 2015. 532 p.
[15] Slotine J.-J. E., Li W. Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1991. 459 p.

THE USE OF PADÉ APPROXIMATIONS FOR MODELLING COMPLEX NON LINEAR SYSTEMS

Gorpinchenko A.S. *postgraduate student, National University of Food Technologies, Kyiv, ORCID: https://orcid.org/0009-0005-6190-7348, e-mail: antongorpinchenkodra@gmail.com*

This article examines the problem of effective mathematical modelling of complex nonlinear control and self-organisation systems, which are widely used in modern scientific research, particularly in the theory of dynamical systems, synergetics, automatic control and mathematical physics. The nonlinear nature of such systems significantly complicates the derivation of exact analytical solutions, necessitating the use of approximate methods of analysis. One promising approach to studying such systems is the use of rational approximations, in particular Padé approximations, which allow for more accurate approximations of functions compared to classical power series expansions. The aim of this work is to investigate the applicability of Padé approximations for the analysis of non-linear functions arising in the modelling of control and self-organisation processes in complex dynamic systems, as well as to compare their effectiveness with traditional polynomial approximation methods. The paper considers mathematical models described by non-linear functional dependencies and investigates their approximation properties using the example of a model function characterising the saturation process in control systems. In the course of the study, a comparative analysis of Padé approximations and Taylor polynomials was carried out. It is shown that the use of rational approximations allows for a significant improvement in approximation accuracy and an expansion of the scope of application of mathematical models, in particular beyond the radius of convergence of power series. Particular attention is paid to the analysis of approximation errors, the asymptotic behaviour of functions, and the investigation of the peculiarities of using Padé approximations for functions with logarithmic features. The results obtained demonstrate that Padé approximations can be effectively applied to simplify complex nonlinear models, analyse the stability of dynamic systems, investigate saturation regimes, and construct reduced mathematical models. Furthermore, the paper considers the numerical implementation of algorithms for constructing approximations and investigates the stability of computational procedures when determining the coefficients of rational approximations. The practical significance of the results obtained lies in the possibility of applying Padé approximations to improve the efficiency of mathematical modelling of complex processes in control systems, synergetic systems and other fields of applied science. The proposed approach can be used for the analysis of non-linear dynamic processes, the optimisation of control algorithms and the development of more accurate mathematical models of complex systems.

Keywords: *Padé approximation; non-linear systems; mathematical modelling; synergetic systems; rational approximations; Taylor series; dynamic systems; control systems.*

References

[1] G. A. Baker, and P. Graves-Morris, *Padé Approximants*, 2nd ed., Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1996. **doi: 10.1017/CBO9780511530074**.

[2] C. M. Bender, and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York, USA: Springer New York, 1999. **doi: 10.1007/978-1-4757-3069-2**.

[3] J. P. Boyd, "Pade approximant algorithm for solving nonlinear ordinary differential equation boundary value problems on an unbounded domain," *Computers in Physics*, vol. 11, pp. 299–303, 1997. **doi: 10.1063/1.168606**.

[4] P. Gonnet, S. Güttel, and L. N. Trefethen, "Robust Padé approximation via SVD," *SIAM Review*, vol. 55(1), pp. 101–117, 2013. **doi: 10.1137/110853236**.

[5] N. J. Higham, *Functions of Matrices: Theory and Computation*. Philadelphia, USA: SIAM, 2008. **doi: 10.1137/1.9780898717778**.

[6] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. New York, USA: Dover Publications, 2001.

[7] G. A. Baker, *Essentials of Padé Approximants*. New York, USA: Academic Press, 1975.

[8] L. N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*. Philadelphia, USA: SIAM, 2013.

[9] *NIST Handbook of Mathematical Functions*, F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark, Eds., Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.

[10] J. P. Boyd, "The Devil's Invention: Asymptotic, Superasymptotic and Hyperasymptotic Series," *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 56., pp. 1–98, 1999. **doi: 10.1023/A:1006145903624**.

[11] J. N. Kutz, *Data-Driven Modeling & Scientific Computation*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2013.

[12] S. Boyd, and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004. **doi: 10.1017/CBO9780511804441**.

[13] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Upper Saddle River : Prentice Hall, 2002.

[14] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2nd ed., Boulder : Westview Press, 2015.

[15] J.-J. E. Slotine, and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 1991.

Стаття надійшла 14.02.2026
Стаття прийнята 28.02.2026
Стаття опублікована 26.03.2026

Цитуйте цю статтю як: Горпинченко А. С. Використання апроксимацій Паде для моделювання складних нелінійних систем. *Вісник Приазовського державного технічного університету. Серія: Технічні науки*. 2026. Вип. 53, том 2. С. 86–92. DOI: https://doi.org/10.31498/2225-6733.53.2.2026.359933.