ройство представляет собой упругий вал-энергоаккумулятор, устанавливаемый в главной линии взамен быстроходного моторного вала типа МЗП. Этот энергоаккумулятор позволяет повысить «качество» силовой линии в 1,6 раза.

Список использованных источников:

1. Артюх В.Г. Качество металлургической машины / В.Г. Артюх // Захист металургійних машин від поломок. – Маріуполь, 2009. – Вип. 11. – С. 23-28.
2. Артюх В.Г. Нагрузки и перегрузки в металлургических машинах : монография / В.Г. Артюх. – Мариуполь : ПГТУ, 2008. – 246 с.
3. Артюх В.Г. Горизонтальные силы при прокатке / В.Г. Артюх, Г.В. Артюх, В.О. Мазур // Вестник ПГТУ. – Мариуполь, 2009. – Вып. 19. – С. 128-132.
4. Большаков В.И. Исследования динамики, прочности и надежности металлургических машин / В.И. Большаков, В.К. Цапко // Захист металургійних машин від поломок. – Маріуполь, 2002. – Вип. 6. – С. 6-27.
5. Большаков В.И. Новые технические решения в металлургическом оборудовании / В.И. Большаков // Металлургическая и горнорудная промышленность. – 2000. – № 4.– С. 10-13.

Bibliography:

4. V.G. Artiukh. The quality of iron and steel machines / V.G. Artiukh // Prevention of failure of iron and steel machines. – Mariupol, 2009. – Issue 11. – pp. 23-28. (Rus.)
5. V.G. Artiukh. Loads and overloads in iron and steel machines : monograph / V.G. Artiukh. – Mariupol : PSTU, 2008. – 246 pp. (Rus.)
6. V.G. Artiukh. Horizontal forces at rolling practice / V.G. Artiukh // Vestnik of PSTU. – Mariupol, 2009. – Issue 19. – pp. 128-132. (Rus.)
7. V.I. Bolshakov. Investigation of dynamics, strength and reliability of iron and steel machines / V.I. Bolshakov, V.K. Tsapko // Prevention of failure of iron and steel machines. – Mariupol, 2002. – Issue 6. – pp. 6-27. (Rus.)
8. V.I. Bolshakov. New technological solutions for iron and steel facilities / V.I. Bolshakov // Iron & steel and mining industry. – 2000. – No4. – pp. 10-13. (Rus.)

Рецензент: В.В. Суглобов
д-р техн. наук, проф., ДВНЗ «ПДТУ»

Статья поступила 01.12.2014

УДК 539.3

© Лупаренко Е.В.*

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

В статье рассматривается решение задачи о вибродеформации элементов конструкций и деталей машиностроения поперечно-неоднородного прямоугольного сечения общего вида. Структурная неоднородность приводит к концентрации напряжений на границах раздела и в угловых точках сечения и определяет прочность детали в целом. Аналитическое решение задачи строится с помощью модификации метода суперпозиций.
***Ключевые слова:** гармонические колебания, метод суперпозиции, изотропия.*

* *канд. техн. наук, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь,* *luparenko_elena@bk.ru*

Лупаренко О.В. Ефективний метод розв'язку задачі про сталі коливання симетричних прямокутних областей загального вигляду. *У статті розглядається розв'язок задачі про вібродеформації елементів конструкцій і деталей машинобудування поперечно-неоднорідного прямокутного перетину загального вигляду. Структурна неоднорідність призводить до концентрації напружень на межах розділу і в кутових точках перетину і визначає міцність деталі в цілому. Аналітичне рішення задачі будується за допомогою модифікації методу суперпозиції.*
Ключові слова: *гармонійні коливання, метод суперпозиції, ізотропія.*

O.V. Luparenko. Efficient method of solving the problems of steady-state oscillations of symmetric rectangular domains of general type. *When the wave processes in bounded elastic bodies are examined, we are faced with a significant complication of the structure of the wave field compared to the case of infinite bodies. This is due to the complex nature of the reflection of elastic waves from the boundaries of the body because the direction of the general flow of energy is changed. Even more complicated the structure of the wave field is, if there are inner boundaries between fields with different elastic properties. This entails the emergence of new wave effects associated with the dynamic stress concentration in the vicinity of the internal and external boundaries of the field. The nature of edge effects is changed too. They will depend not only from the size of the field but also from the geometric and elastic parameters defining the nature of heterogeneity. At the forefront are the questions of systematization of the results for the purpose of extradition of practical recommendations for optimal design of heterogeneous section details in particular conditions of its operation. Urgent enough is the question of the possibility of neglecting of structural heterogeneity and anisotropy of the section of the body in strengthening calculations and evaluation of possible errors. The mathematical basis for the study will be the expressions for particular solutions of equations of motion, constructed for infinite layers, which are sets of plane standing waves. When choosing the form of partial solutions, we must take into account not only the opportunity to satisfy the boundary conditions at the exterior boundary of the field, but also the mechanical properties at the interface of the sphere. This entails the complication of numerical-analytical algorithm of solving the problem.*
Keywords: *harmonic oscillations, the superposition method, isotropy.*

Постановка проблемы. Важное место в проектировании систем управления эксплуатации деталей и конструкций занимают расчеты на прочность и жесткость объектов новой техники. Для адекватного моделирования сложных структур и условий эксплуатации конструкций новой техники их расчетные схемы нуждаются в представлении уточненными математическими моделями с параллельной разработкой их численно-аналитического исследования. Это создает условия для разработки новых эффективных методов проектирования и контроля качества материалов и позволяет решить проблему обеспечения безопасности эксплуатации конструкций.

При расчете вибродеформирующихся элементов конструкций и деталей машиностроения, следует учитывать не только вид их внешнего вибрационного нагружения, но и характер их внутренней структуры. Прежде всего, следует отметить, что при рассмотрении волновых процессов в ограниченных упругих телах мы сталкиваемся с существенным усложнением структуры волнового поля по сравнению со случаем бесконечных тел. Это связано, как известно, со сложным характером отражения упругих волн от границ тела, поскольку при этом изменяется направление общего потока энергии. Еще более усложняется структура волнового поля, если в теле существуют границы раздела областей с различными упругими свойствами или материал, из которого изготовлена деталь, неоднороден.

Данная работа посвящена изложению результатов исследования стационарных волновых процессов в кусочно-неднородных деталях прямоугольной формы. Специфика материала определяется внутренними упругими параметрами области, которые могут быть кусочно-постоянными функциями координат. Важная особенность геометрии рассматриваемых областей обусловлена наличием в них не только угловых точек, но и линий раздела сред с различны-

ISSN 2225-6733

ми упругими характеристиками. Представляет большой практический интерес исследование особенностей волнового поля в окрестности этих линий раздела. Здесь имеет место появление новых волновых эффектов, связанных, прежде всего, с концентрацией динамических напряжений в окрестности внутренних и внешних границ области. Изменяется и природа краевых эффектов, которые уже будут зависеть не только от размеров области, но и от геометрических и упругих параметров, определяющих характер неоднородности.

Анализ последних исследований и публикаций. Огромный вклад в развитие теории и совершенствования методологии решения динамических задач неоднородных упругих тел конечных и бесконечных размеров внесли отечественные и зарубежные ученые В.М. Александров, В.А. Бабешко, В.М. Бабич, А.В. Белоконь, И.И. Ворович, И.П. Гетман, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, В.Т. Гринченко, В.И. Сторожев, А.Ф. Улитко, Ю.А. Устинов и др. Данная проблема тесно связана с важнейшими задачами изучения волнового поля в клиновидных упругих областях, трудности решения которых отмечены в [1, 2]. Рассмотрение ведется в рамках использования связи между особенностями волновых полей в окрестности угловых точек и скоростью сходимости рядов в общих решениях [1, 3]. Отмеченные работы посвящены колебаниям однородных прямоугольных тел. Для случая неоднородной структуры появляется необходимость исследования особенностей решения во внутренних нерегулярных точках границы на стыке областей с различными упругими свойствами [4].

Цель статьи – на основе метода суперпозиций построить решение задачи об установившихся колебаниях кусочно-неоднородных изотропных упругих областей прямоугольной формы, с использованием поведения характеристик волнового поля в угловых точках области.

Изложение основного материала. Рассмотрим волновые движения, полностью характеризующиеся двухмерным полем в плоскости $\alpha_1 O \alpha_2$ в бесконечной вдоль оси $O\alpha_3$ призме V. Предполагаем, что сечение призмы занимает в плоскости $\alpha_1 O \alpha_2$ область $D = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1| \le a, |\alpha_2| \le b\}$. Пусть $S_{\pm}^{(m)}$ $(m = 1, 2, ..., N)$ - прямые, имеющие в выбранной системе координат уравнения $\alpha_1 = \pm a_m$ и разделяющие сечение D на области $D^{(1)}$ и $D^{(m)} = D_{-}^{(m)} \cup D_{+}^{(m)}$ $(m = 2, 3, ..., N)$, причем $a_1 < a_2 < ... < a_N = a$. Области $D_{-}^{(m)}$ и $D_{+}^{(m)}$ располагаются симметрично относительно начала координат, имеют одинаковую толщину $h^{(m)} = a_m - a_{m-1}$ и определяются неравенствами:

$$D_{-}^{(m)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in [-a_m, -a_{m-1}], |\alpha_2| \le b\}, D_{+}^{(m)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in [a_{m-1}, a_m], |\alpha_2| \le b\},$$

а область $D^{(1)}$ является внутренней прямоугольной односвязной областью с центром тяжести в начале координат:

$$D^{(1)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1| \le a_1, |\alpha_2| \le b\}.$$

Каждая из перечисленных N областей $D^{(m)}$ занята своим однородным и изотропным упругим материалом с модулем сдвига $\mu^{(m)}$, коэффициентом Пуассона $\nu^{(m)}$ и плотностью $\rho^{(m)}$. Здесь и далее верхний индекс определяет принадлежность механической характеристики или упругого модуля к области $D^{(m)}$. Предположим, что волновое поле в области сечения D возбуждается действием на границах $\alpha_1 = \pm a, \alpha_2 = \pm b$ нормальными, гармонически изменяющимися во времени с частотой ω, самоуравновешенными нагрузками интенсивности $q_1(\alpha_2)$ и $q_2(\alpha_1)$ соответственно. В последующих выкладках общий для всех характеристик волновых полей временной множитель $e^{i\omega t}$ опускается. С учетом симметрии области, можно рассматривать волновое поле части области сечения призмы, расположенной в первой четверти.

Амплитудные смещения и напряжения точек упругих сред областей $D^{(m)}$ обозначим через $u_{\beta}^{(m)}$ и $\tau_{\gamma\beta}^{(m)}$ соответственно $(\beta = 1, 2;\ \gamma = 1, 2)$. Общую краевую задачу определения собственных частот и собственных форм колебаний кусочно-неоднородной области D формулируем в следующем безразмерном виде. Во всех областях $D^{(m)}$ вводим безразмерные локальные координаты $x^{(m)}$ и ищем функции $U_{\beta}^{(m)}(x^{(m)}, y)$, удовлетворяющие уравнениям движения:

$$\Delta U_{\beta}^{(m)} + (C_{12}^{(m)} + 1)(U_{1,1}^{(m)} + U_{2,2}^{(m)})_{,\beta} + (\Omega^{(m)})^2 U_{\beta}^{(m)} = 0\,, \tag{1}$$

где

$$U_{\beta}^{(m)} = u_{\beta}^{(m)} / a,\ C_{12}^{(m)} = C_{11}^{(m)} - 2\,,\ C_{11}^{(m)} = 2(1-\nu^{(m)})/(1-2\nu^{(m)})\,,\ f_{,1}^{(m)} = \frac{\partial f^{(m)}}{\partial x^{(m)}},\ f_{,2}^{(m)} = \frac{\partial f^{(m)}}{\partial y}\,,$$

$$\Omega^{(m)} = a\omega\sqrt{\frac{\rho^{(m)}}{\mu^{(m)}}}\,,\ x = \alpha_1 / a\,,\ \delta_m = a_m / a,\ \delta_0 = 0,\ y = \alpha_2 / a\,,\ \bar{h}^{(m)} = \delta_m - \delta_{m-1},\ x^{(m)} \in [0, \bar{h}^{(m)}]\,,$$

$$y \in [0,\eta],\ \eta = b/a\,,\ m = 1,2,...,N\,.$$

Безразмерные амплитудные компоненты тензора напряжений $\sigma_{\gamma\beta}^{(m)} = \tau_{\gamma\beta}^{(m)} / \mu^{(m)}$ вычисляются по соотношениям закона Гука

$$\sigma_{11}^{(m)} = C_{11}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + C_{12}^{(m)} U_{2,2}^{(m)},\ \sigma_{22}^{(m)} = C_{12}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + C_{22}^{(m)} U_{2,2}^{(m)},\ \sigma_{12}^{(m)} = U_{1,2}^{(m)} + U_{2,1}^{(m)}\,.$$

На прямых $S_{+}^{(m)}$ должны выполняться условия контакта областей с различными упругими свойствами. На стыке всех областей $\bar{D}^{(m)} = \{(x^{(m)}, y) : 0 \le x^{(m)} \le \bar{h}^{(m)}, 0 \le y \le \eta\}$ и $\bar{D}^{(m+1)}$ $\left(m = 1,2,...,N-1\right)$ принимаются выполненными условия жесткого сцепления:

$$\sigma_{1\gamma}^{(m)}(\bar{h}^{(m)}, y) = r_m \sigma_{1\gamma}^{(m+1)}(0, y)\,,$$
$$U_{\gamma}^{(m)}(\bar{h}^{(m)}, y) = U_{\gamma}^{(m+1)}(0, y)\,,\ r_m = \mu^{(m+1)} / \mu^{(m)}\,. \tag{2}$$

На внешней границе сечения предполагаем заданными силовые граничные условия:

$$\sigma_{11}^{(N)}(1-\delta_{N-1}, y) = q_1^{(N)}(y)\,, \qquad \sigma_{22}^{(m)}(x^{(m)}, \eta) = q_2^{(m)}(x^{(m)})\,,$$
$$\sigma_{12}^{(N)}(1-\delta_{N-1}, y) = \sigma_{12}^{(m)}(x^{(m)}, \eta) = 0\,, \qquad q_{\gamma}^{(m)} = q_{\gamma} / \mu^{(m)}\,. \tag{3}$$

Следуя алгоритму метода суперпозиции [3, 5], общее решение $U_{\beta}^{(m)}$, удовлетворяющее системе уравнений (1) внутри области $\bar{D}^{(m)}$, конструируем в виде суммы двух частных решений этой системы. Каждое из них описывает симметричные колебания бесконечных полос $G_1^{(m)} = \{(x^{(m)}, y) : 0 \le x^{(m)} \le \bar{h}^{(m)}, |y| < \infty\}$ и $G_2^{(m)} = \{(x^{(m)}, y) : |x^{(m)}| < \infty, |y| \le \eta\}$, образующих при своем пересечении область $\bar{D}^{(m)}$. При выборе форм этих частных решений необходимо учитывать возможность удовлетворения при их помощи не только граничным условиям на внешней границе области, но и условиям сопряжения механических характеристик на границе раздела сред. Естественно, это требует изменения численно-аналитического алгоритма решения задачи, предложенного ранее для решения задачи о вынужденных колебаниях однородного прямоугольника [5, 6]. Четность или нечетность частных решений определяется видом граничных условий (3). При этом необходимо учитывать, что по координате $x^{(m)}$ функции $U_{\beta}^{(m)}(x^{(m)}, y)$ являются функциями общего вида. Поэтому продолжим их по координате $x^{(m)}$ на отрезок $\left[-\delta_m, -\delta_{m-1}\right]$. Эти продолжения для функции $U_1^{(m)}(x^{(m)}, y)$ предполагаем нечетными, а для функции $U_2^{(m)}(x^{(m)}, y)$ - четными. Тогда, складывая построенные для слоев $G_1^{(m)}$ и $G_2^{(m)}$ частные решения системы (1), будем иметь общее решение задачи в области $\bar{D}^{(m)}$ $(m = 2,3,...N)$ в виде

$$\begin{aligned} U_1^{(m)} &= (\bar{H}^{(m)} sh(t^{(m)} x^{(m)}) + \bar{Q}^{(m)} ch(t^{(m)} x^{(m)}))\cos\alpha(y-\eta) + \bar{R}^{(m)} ch(r^{(m)} y)\sin(\chi^{(m)}(x^{(m)} - \bar{h}^{(m)})) \\ U_2^{(m)} &= (H^{(m)} ch(t^{(m)} x^{(m)}) + Q^{(m)} sh(t^{(m)} x^{(m)}))\sin\alpha(y-\eta) + R^{(m)} sh(r^{(m)} y)\cos(\chi^{(m)}(x^{(m)} - \bar{h}^{(m)}))\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Для области $\bar{D}^{(1)}$ решение строится аналогично случаю симметричных колебаний однородного прямоугольника и имеет вид

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= \bar{H}^{(1)} sh(t^{(1)} x^{(1)})\cos\alpha(y-\eta) + \bar{R}^{(1)} ch(r^{(1)} y)\sin(\chi^{(1)}(x^{(1)} - \delta_1)) \\ U_2^{(1)} &= H^{(1)} ch(t^{(1)} x^{(1)})\sin\alpha(y-\eta) + R^{(1)} sh(r^{(1)} y)\cos(\chi^{(1)}(x^{(1)} - \delta_1))\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Набор констант $\bar{H}^{(m)}, H^{(m)}, \bar{Q}^{(m)}, ..., R^{(m)}$ в формулах (4)-(5) обеспечивает необходимую степень произвола для удовлетворения граничных условий и условий сопряжения в рассматриваемой составной области. В качестве значений $\alpha, \chi^{(m)}$ целесообразно выбрать такие последовательности чисел $\alpha_k, \chi_j^{(m)}$, чтобы системы соответствующих функций были полными и ортогональными на отрезках $|y| \le \eta$ и $x^{(m)} \in [0, \bar{h}^{(m)}]$. Из этого требования в качестве возможных следуют значения

$$\alpha_k = k\pi/\eta, \quad \chi_j^{(m)} = j\pi/\bar{h}^{(m)}, \ k = 1,2,...; \ j = 1,2,... . \tag{6}$$

Подставляя выражения (4),(5) в системы (1), получаем для каждого значения k и j системы однородных линейных уравнений относительно коэффициентов $\bar{H}^{(m)}$ и $H^{(m)}$,…, $\bar{R}^{(m)}$ и $R^{(m)}$. Из условия существования нетривиального решения этих систем находим значения параметров $t^{(m)}$ и $r^{(m)}$

$$(t_{\beta k}^{(m)})^2 = \alpha_k^2 - (l_\beta^{(m)})^2, \ (r_{\beta j}^{(m)})^2 = (\chi_j^{(m)})^2 - (l_\beta^{(m)})^2, \ l_1^{(m)} = \Omega^{(m)} \Big/ \sqrt{C_{11}^{(m)}}, \ l_2^{(m)} = \Omega^{(m)}, \ \beta = 1,2 . \tag{7}$$

и связь между упомянутыми коэффициентами, что полностью определяет общее решение задачи во всех областях $\bar{D}^{(m)}$ позволяет удовлетворить условиям сопряжения (2) и силовым условиям (3).

Непосредственное удовлетворение граничных условий (2) - (3) не позволяет в явном виде определить произвольные постоянные, входящие в общее решение задачи. Поэтому введём в рассмотрение более простые вспомогательные граничные условия [3, 5], позволяющие максимально упростить последующую систему интегральных уравнений (СИУ). Итак, рассмотрим решение системы (1) при следующих вспомогательных граничных условиях.

Области $\bar{D}^{(m)} (m = 2,..., N-1, N)$:

$$\begin{aligned}
&U_1^{(m)}(\bar{h}^{(m)}, y) = f_1^{(m)}(y), && \sigma_{12}^{(m)}(\bar{h}^{(m)}, y) = \varphi_1^{(m)}(y), && \varphi_1^{(N)}(y) = 0 \\
&U_2^{(m)}(x^{(m)}, \eta) = f_2^{(m)}(x^{(m)}), && \sigma_{12}^{(m)}(x^{(m)}, \eta) = 0, && \\
&U_1^{(m)}(0, y) = f_1^{(m-1)}(y), && \sigma_{12}^{(m)}(0, y) = r_m^{-1}\varphi_1^{(m-1)}(y) &&
\end{aligned} \tag{8}$$

Область $\bar{D}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
&U_1^{(1)}(\delta_1, y) = f_1^{(1)}(y), && \sigma_{12}^{(1)}(\delta_1, y) = \varphi_1^{(1)}(y), \\
&U_2^{(1)}(x^{(1)}, \eta) = f_2^{(1)}(x^{(1)}), && \sigma_{12}^{(1)}(x^{(1)}, \eta) = 0 .
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $f_1^{(m)}(y), \varphi_1^{(m)}(y), f_2^{(m)}(x^{(m)})$ - неизвестные вспомогательные функции. Раскладываем эти $(3N-1)$ функций в ряды Фурье на соответствующих отрезках и, используя общее решение задачи, получим в явном виде характеристики волнового поля во всей составной области сечения через коэффициенты Фурье $f_{10}^{(m)}, f_{1k}^{(m)}, f_{20}^{(m)}, f_{2j}^{(m)}, \varphi_{1k}^{(m)}$ введенных вспомогательных функций. Например, выражения для перемещений в области $\bar{D}^{(1)}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
U_1^{(1)} = &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(l_2^{(1)})^2} [2\alpha_k f_{1k}^{(1)} \Delta_1^{(1)}(x^{(1)}, \delta_1, \alpha_k) + \varphi_{1k}^{(1)} \Delta_4^{(1)}(x^{(1)}, \delta_1, \alpha_k)] \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(\chi_j^{(1)})^2}{(l_2^{(1)})^2} f_{2j}^{(1)} \Delta_2^{(1)}(y, \eta, \chi_j^{(1)}) \sin \chi_j^{(1)}(x^{(1)} - \delta_1) + f_{10}^{(1)} sn_1^{(1)}(x, \delta_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2^{(1)} = &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(l_2^{(1)})^2} [2\alpha_k f_{1k}^{(1)} \Delta_2^{(1)}(x^{(1)}, \delta_1, \alpha_k) + \frac{\alpha_k \varphi_{1k}^{(1)}}{(l_2^{(1)})^2} \Delta_3^{(1)}(x^{(1)}, \delta_1, \alpha_k)] \sin \alpha_k (y - \eta) + \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(\chi_j^{(1)})^2}{(l_2^{(1)})^2} f_{2j}^{(1)} \Delta_1^{(1)}(y, \eta, \chi_j^{(1)}) \cos \chi_j^{(1)}(x^{(1)} - \delta_1) + f_{20}^{(1)} sn_1^{(1)}(y, \eta)
\end{aligned} \tag{10}$$

ISSN 2225-6733

Здесь $f_{10,}f_{1k},...,\varphi_{1k}$ – коэффициенты Фурье соответствующих функций.

$$\Delta_1^{(m)}(u,\nu,z_j)=s_{2j}^{(m)}(u,\nu)-\frac{a_{3j}^{(m)2}}{2z_j^2}s_{1j}^{(m)}(u,\nu);\ \Delta_2^{(m)}(u,\nu,z_j)=\frac{a_{3j}^{(m)2}}{2z_j a_{1j}^{(m)}}c_{1j}^{(m)}(u,\nu)-\frac{a_{2j}^{(m)}}{z_j}c_{2j}^{(m)}(u,\nu);$$

$$\Delta_3^{(m)}(u,\nu,z_j)=\frac{z_j}{a_{1j}^{(m)}}c_{1j}^{(m)}(u,\nu)-\frac{a_{2j}^{(m)2}}{z_j}c_{2j}^{(m)}(u,\nu);\ \Delta_4^{(m)}(u,\nu,z_j)=s_{2j}^{(m)}(u,\nu)-s_{1j}^{(m)}(u,\nu); \tag{11}$$

$$a_{\gamma j}^{(m)2}=z_j^2-l_\gamma^{(m)2},\ a_{3j}^{(m)2}=a_{2j}^{(m)2}+z_j^2,\ s_{\beta k}^{(m)}(u,\nu)=\frac{sh(a_{\beta k}^{(m)}u)}{sh(a_{\beta k}^{(m)}\nu)},\quad c_{\beta k}^{(m)}(u,\nu)=\frac{ch(a_{\beta k}^{(m)}u)}{sh(a_{\beta k}^{(m)}\nu)},$$

$$sn_\beta^{(m)}(u,\nu)=\frac{\sin(l_\beta^{(m)}u)}{\sin(l_\beta^{(m)}\nu)},\ cn_\beta^{(m)}(u,\nu)=\frac{\cos(l_\beta^{(m)}u)}{\sin(l_\beta^{(m)}\nu)},\ \beta=1,2;\ m=1,2$$

Для определения введенных вспомогательных функций, примем во внимание $(3N-1)$ неиспользованных граничных условий и условий сопряжения из (2)-(3), а именно:

$$\begin{aligned}&\sigma_{11}^{(m)}(\overline{h}^{(m)},y)=r_m\sigma_{11}^{(m+1)}(0,y), &&U_2^{(m)}(\overline{h}^{(m)},y)=U_2^{(m+1)}(0,y),\\ &\sigma_{22}^{(m)}(x^{(m)},\eta)=q_2^{(m)}(x^{(m)}), &&(m=1,2,...,N-1),\\ &\sigma_{11}^{(N)}(1-\delta_{N-1},y)=q_1^{(N)}(y), &&\sigma_{22}^{(N)}(x^{(N)},\eta)=q_2^{(N)}(x^{(N)}).\end{aligned} \tag{12}$$

Так как все компоненты волнового поля, фигурирующие в (12) выражены через коэффициенты Фурье вспомогательных функций, то эти условия представляют собой систему интегральных уравнений для их определения. Для построения эффективного алгоритма ее решения и последующего удачного подбора координатных функций в асимптотическом методе исследуем особенности волнового поля в окрестности нерегулярных точек границы. Это угловые точки стыка областей $A_m(\overline{h}^{(m)},\eta)$ и внешняя угловая точка сечения $B(1-\delta_{N-1},\eta)$. Учитывая механический смысл вспомогательных функций, предположим, что их особенности в точках A_m определяются формулами ($m=1,2,...,N-1$):

$$\varphi_1^{(m)}(\xi)=\Phi_1^{(m)}(\eta-\xi)^{p_m-1},\ \left(f_1^{(m)}(\xi)\right)'=F_1^{(m)}(\eta-\xi)^{p_m-1},\text{ при } \xi\to\eta;$$

$$\left(f_2^{(m)}(\xi)\right)'=F_2^{(m)}(\overline{h}^{(m)}-\xi)^{p_m-1},\text{ при } \xi\to\overline{h}^{(m)};$$

$$\left(f_2^{(m+1)}(\xi)\right)'=\overline{F}_2^{(m+1)}\xi^{p_m-1},\text{ при } \xi\to 0. \tag{13}$$

В окрестности точки B области $\overline{D}^{(N)}$:

$$\left(f_1^{(N)}(\xi)\right)'=F_1^{(N)}(\eta-\xi)^{p_N-1}\ \text{ при } \xi\to\eta;$$

$$\left(f_2^{(N)}(\xi)\right)'=F_2^{(N)}(1-\delta_{N-1}-\xi)^{p_{N-1}}\ \text{ при } \xi\to 1-\delta_{N-1}. \tag{14}$$

Здесь через p_m обозначены параметры, характеризующие особенности искомых функций в указанных точках, а через $\Phi_1^{(m)},...,F_2^{(N)}$ - произвольные постоянные. Производя интегрирование в формулах (13),(14), определяем асимптотику коэффициентов Фурье вспомогательных функций в окрестности всех нерегулярных точек границы. Это позволяет, используя методику работ [3, 5, 6], исследовать поведение полученной системы интегральных уравнений при подходе к нерегулярным точкам. Граничные условия задачи (12) таковы, что обеспечивают ограниченность правых частей системы интегральных уравнений во всей области. Поэтому, требуя ограниченности левых частей системы и используя полученные асимптотики, можно для каждой нерегулярной точки получить систему уравнений для определения параметров p_m. При этом в точках A_m асимптотически значимыми будут слагаемые, содержащие коэффициенты Фурье функций $f_1^{(m)},\varphi_1^{(m)},f_2^{(m)},f_2^{(m+1)}$. В окрестности внешней угловой точки B поведение характеристик волнового поля будет определяться функциями $f_1^{(N)}, f_2^{(N)}$. Переобозначая константы при особенностях в (13),(14), в результате для их определения приходим к следующим системам однородных уравнений. В точках $A_m (m=1,2,...,N-1)$:

$$\begin{cases} -s_m \sin\frac{\pi p_m}{2}\Phi_1^{(m)} + 2(n_m + r_m n_{m+1})\sin\frac{\pi p_m}{2}F_1^{(m)} + 2n_m p_m F_2^{(m)} + 2n_{m+1}p_m r_m \bar{F}_2^{(m+1)} = 0 \\ (1+(C_{11}^{(m)})^{-1}) + r_m(1+(C_{11}^{(m+1)})^{-1})\sin\frac{\pi p_m}{2}\Phi_1^{(m)} + 2s_m \sin\frac{\pi p_m}{2}F_1^{(m)} - \\ -2(1-n_m p_m)F_2^{(m)} - 2(1-n_{m+1}p_m)\bar{F}_2^{(m+1)} = 0 \\ (n_m^{-1} + p_m)\Phi_1^{(m)} + 2p_m F_1^{(m)} + 2\sin\frac{\pi p_m}{2}F_2^{(m)} = 0 \\ r_m^{-1}(n_{m+1}^{-1} + p_m)\Phi_1^{(m)} + 2p_m F_1^{(m)} + 2\sin\frac{\pi p_m}{2}\bar{F}_2^{(m+1)} = 0 \end{cases} \tag{15}$$

где $s_m = (C_{11}^{(m)})^{-1} + (C_{11}^{(m+1)})^{-1}$, $n_m = (C_{11}^{(m)} - 1)/C_{11}^{(m)}$.

В точке B:

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi p_N}{2}F_1^{(\mathrm{N})} + p_N \sin F_2^{(\mathrm{N})} = 0 \\ p_N F_1^{(\mathrm{N})} + \sin\frac{\pi p_N}{2}F_2^{(\mathrm{N})} = 0 \end{cases}. \tag{16}$$

Очевидно, что константы $F_1^{(N)}, F_2^{(N)}$ в системе (16) не будут равны нулю, если параметр p_N удовлетворяет уравнению

$$\sin^2\frac{\pi p_N}{2} - p_N^2 = 0\,. \tag{17}$$

Как видим, характер особенности механического поля в точке B не зависит от упругих постоянных областей $\bar{D}^{(m)}$. Учитывая механический смысл функций $f_1^{(N)}(\xi), f_2^{(N)}(\xi)$ и требуя ограниченности энергии всей системы, приходим к выводу, что при построении асимптотики решения следует учитывать только вещественный корень уравнения (17) и счетное множество комплексных корней с положительной вещественной частью.

Параметры локальной особенности p_m $(m=1,2,...,N)$, характеризующие характер разрыва волновых характеристик во внутренних угловых точках составной области, не зависят от частоты и геометрических параметров η, δ_m и определяются только значениями модулей сдвига и коэффициентами Пуассона стыкуемых областей. Их можно определить из условия существования нетривиального решения системы $\Delta(p_m, \mu^{(m)}, \nu^{(m)}, \mu^{(m+1)}, \nu^{(m+1)}) = 0$. При определенных соотношениях механических свойств материалов стыкуемых областей, это уравнение имеет вещественный корень $0 < p_m < 1$, что характеризует возникновение локальных особенностей в значениях напряжений в точках $A_m (m=1,2,...,N-1)$.

Применяя для решения системы интегральных уравнений (11) метод Бубнова-Галеркина, и, учитывая при выборе координатных функций характер поведения (13), (14) характеристик волнового поля в окрестности нерегулярных точек границы, приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений с известной асимптотикой неизвестных, которая определяется корнями уравнений (17), (18). Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим частотное уравнение для определения значений резонансных частот, что дает возможность численно исследовать и собственные формы колебаний.

Следует отметить, что если стоит задача исследования только характера особенности напряженного состояния в окрестности точек A_m и B, а не во всей области сечения в целом, то нет необходимости строить решения для конечных прямоугольных областей и решать краевую задачу (1)-(3). Используя методы выделения особенностей [7], можно понизить размерность исходной задачи и определить параметры, характеризующие особенность из соответствующих граничных условий.

Выводы

Предлагаемый численно-аналитический метод решения достаточно эффективен и позволяет после выделения особенностей решения в особых точках границы построить простой алгоритм численного исследования собственных частот и форм колебаний областей рассматриваемой геометрии и неоднородности. В его рамках возможно рассмотрение волновых полей как неоднородных многосвязных областей, так и задач о кинематическом возбуждении колебаний. Без каких-либо принципиальных затруднений вместо условий жесткого сцепления (2) стыкуемых областей можно рассмотреть другой характер сопряжения, например условия гладкого контакта.

Список использованных источников:

1. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев : Наукова думка, 1981. – 283 с.
2. Гринченко В.Т. Равновесие упругих тел канонической формы / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко. – Киев : Наукова думка, 1985. – 280 с.
3. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров / А.В. Белоконь // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233. – №1. – С. 56-59.
4. Вовк Л.П. Виброабразивное изнашивание анизотропных неоднородных прямоугольных в плане деталей / Л.П. Вовк, Е.В. Лупаренко // Вопросы вибрационной технологии: Межвуз. сб. научных статей. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2001. – С. 125-130.
5. Вовк Л.П. Симметричные колебания электроупругой пластины / Л.П. Вовк // Известия СКНЦ ВШ. – 1982. – №3. – С. 42-45.
6. Вовк Л.П. Об установившихся колебаниях электроупругой пластины переменной толщины / Л.П. Вовк, А.В. Белоконь // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18. – №5. – С. 93-97.
7. Аксентян О.К. Особенности напряженно – деформированного состояния плиты в окрестности ребра / О.К. Аксентян // Прикладная механика. – 1967. – Т. 31. – №1. – С. 178-186.

Bibliography:

1. Grinchenko V.T. Harmonic oscillations and waves in elastic bodies / V.T. Grinchenko, V.V. Meleshko. – Kiev : Naukova dumka, 1981. – 283 p. (Rus.)
2. Grinchenko V.T. Equilibrium of elastic bodies canonical form / V.T. Grinchenko, A.F. Ulitko – Kiev : Naukova dumka, 1985. – 280 p. (Rus.)
3. Belokon A.B. A method for solving problems of elasticity theory for bodies of finite size / A. Belokon // Dokl. USSR Academy of Sciences. – 1977. – V. 233. – №1. – P. 56-59. (Rus.)
4. Vovk L.P. Vibroabrazivnoj wear anisotropic inhomogeneous rectangular parts / L.P. Vovk, E.V. Luparenko // Questions of vibration technology: Interuniversity thematic collection of scientific papers. – Rostov-on-Don : DSTU, 2001. – P. 125-130. (Rus.)
5. Vovk L.P. Symmetric vibrations electroelastic plates / L.P. Vovk // News NCSC high school. – 1982. – №3. – P. 42-45. (Rus.)
6. Vovk L.P. Of steady oscillations electroelastic plates of variable thickness / L.P. Vovk, A.V. Belokon // Journal of Applied Mechanics. – 1982. – V. 18. – №5. – P. 93-97. (Rus.)
7. Aksentyan O.K. Features of stress - strain state in the vicinity of the rib plate / O.K, Aksentyan // Applied mechanics. – 1967. – V. 31. – №1. – P. 178-186. (Rus.)

Рецензент: Ю.Е. Коляда
д-р физ.-мат. наук, проф., МГУ

Статья поступила 15.12.2014