УДК 519.862 : 330.356.7

Володимир Олександрович ЯНКОВИЙ
кандидат економічних наук, доцент кафедри економіки і планування бізнесу,
Одеський національний економічний університет, e-mail: vladimir_ya@ukr.net

НОВІ АНАЛІТИЧНІ МОЖЛИВОСТІ НЕОКЛАСИЧНИХ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

Янковий, В. О. Нові аналітичні можливості неокласичних виробничих функцій / Володимир Олександрович Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень: зб. наук. праць; за ред. М. І. Звєрякова (голов. ред.) та ін. (ISSN 2313-4569). – Одеса: Одеський національний економічний університет. – 2016. – № 2 (61). – С. 136–145.

Анотація. *У статті розглянуто теоретичні питання мікроекономіки, зокрема, використання неокласичних виробничих функцій в процесі моделювання випуску продукції залежно від важливіших факторів, представлених у вартісному вираженні. Для двофакторних функцій Кобба-Дугласа і CES-функції досліджено оптимальну фондоозброєність, яка максимізує випуск продукції при заданих загальних витратах капіталу (мінімізує загальні витрати при фіксованому випуску продукції), величина граничної норми заміщення ресурсів, рівняння рівноваги виробника. Запропоновано нове тлумачення граничної норми заміщення ресурсів як індикатора диспропорцій при інвестуванні коштів у агреговані фактори «капітал» і «праця». Виведено формули зон беззбиткового інвестування за умови вкладення додаткових коштів у пропорції оптимальної фондоозброєності в уже існуюче виробництво, яке адекватно описується за допомогою CES-функції.*

Ключові слова: *мікроекономіка; виробничі функції; заміщення ресурсів; зони беззбиткового інвестування.*

Владимир Александрович ЯНКОВОЙ
кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики и планирования бизнеса,
Одесский национальный экономический университет, e-mail: vladimir_ya@ukr.net

НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ НЕОКЛАССИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Янковой, В. А. Новые аналитические возможности неоклассических производственных функций / Владимир Александрович Янковой // Вестник социально-экономических исследований: сб. науч. трудов; под ред. М. И. Зверякова (глав. ред.) и др. (ISSN 2313-4569). – Одесса: Одесский национальный экономический университет. – 2016. – № 2 (61). – С. 136–145.

Аннотация. *В статье рассмотрены теоретические вопросы микроэкономики, в частности, использование неоклассических производственных функций в процессе моделирования выпуска продукции в зависимости от важнейших факторов, представленных в стоимостном выражении. Для двухфакторных функций Кобба-Дугласа и CES-функции исследована оптимальная фондовооруженность, максимизирующая выпуск продукции при заданных общих затратах капитала (минимизирует общие затраты при фиксированном выпуске продукции), величина предельной нормы замещения ресурсов, уравнение равновесия производителя. Предложено новое толкование предельной нормы замещения ресурсов как индикатора диспропорций при инвестировании средств в агрегированные факторы «капитал» и «труд». Выведены формулы зон безубыточного инвестирования при условии вложения дополнительных средств в пропорции оптимальной фондовооруженности в уже существующее производство, которое адекватно описывается с помощью CES-функции.*

Ключевые слова: *микроэкономика; производственные функции; замещение ресурсов; зоны безубыточного инвестирования.*

Volodymyr YANKOVYI
PhD in Economics, Associate Professor, Department of Economics and Business Planning,
Odessa National Economic University, e-mail: vladimir_ya@ukr.net

NEW ANALYTICAL CAPABILITIES OF NEOCLASSICAL PRODUCTION FUNCTIONS

Yankovyi, V. (2016), New analytical capabilities of neoclassical production functions. Ed.: M. Zveryakov (ed.-in-ch.) and others [Vyrobnycha funktsiia z postiinoiu elastychnistiu zamishchennia resursiv; za red. M. I. Zveriakova (gol. red.) ta in.], Socio-economic research bulletin; Vìsnik socìal'no-ekonomìčnih doslìdžen' (ISSN 2313-4569), Odessa National Economic University, Odessa, No. 2 (61), pp. 136–145.

Abstract. *Theoretical questions of microeconomics, in particular, use of neoclassical production functions in the simulation of output based on the most important factors presented in terms of value are discussed. The optimal capital-labor ratio, that maximizes output for a given overall cost of capital (minimizes the total cost for a fixed output) for two-factor Cobb-Douglas function and CES-function is examined. The values of marginal rate of substitution of resources and equilibrium equation of manufacturer are also considered.*

Minimum overall costs of capital in the case of an optimal capital-labor ratio for the Cobb-Douglas function are defined. The marginal rate of substitution of resources is equal to one and marginal products of capital and working are the same (equilibrium equation of manufacturer) demonstrated in this case.

The formula of the optimal capital-labor ratio is derived for CES-function. It is shown that the minimum total capital expenditures are defined similarly with the Cobb-Douglas, and the marginal rate of substitution of resources is also equal to one. It means that both neoclassical production functions under consideration behave themselves in extreme situations identically. Basic inequality is derived. It provides break-even investment in existing production, adequately described by a CES-function, on condition of investing in additional funds in the proportion of optimal capital-labor ratio. Three cases of break-even zones depending on the degree of homogeneity of the CES-function are considered.

A new interpretation of marginal rate of substitution of resources as an indicator of disparities in investing funds in aggregate factors «capital» and «labor» is proposed. Practical advice on management actions of the manufacturer in violation of a single norm of substitution of resources is provided.

The causes of violations of inequalities that define the zones of break-even investment are also analyzed. The main factor concluding such violations in the econometric study is a low value of coefficients scale of two-factor neoclassical functions. This is the result of imperfections in the external environment of the manufacturer. Mainly fiscal nature of the current tax policy in relation to small and medium business functions appears in the calculation of the Cobb-Douglas function and CES-function at the low values of coefficient scale.

Keywords: *microeconomics; production functions; replacement resources; zones of breakeven investment.*

JEL classification: *C620; C670; D240*

Постановка проблеми у загальному вигляді. Виробничі функції (ВФ) Кобба-Дугласа і функція з постійною еластичністю заміщення ресурсів (*CES*-функція – від англ. абревіатури *Constant Elasticity of Substitution*) складають фундамент сучасного економетричного аналізу в усіх галузях господарського комплексу країни. При практичних розрахунках виділяють важливу підгрупу так званих неокласичних ВФ. Їх неокласичність проявляється в обмеженнях, які накладаються на параметри цих функцій, що випливають з основних неокласичних вимог [1].

Неокласична ВФ Кобба-Дугласа у вартісному представленні має наступний вигляд:

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta}, \quad (1)$$

де Y – випуск продукції у вартісному вираженні;
K – вартість капіталу, що спрямований у виробничі фонди ($0 < K$);
L – витрати капіталу на оплату праці ($0 < L$);
A – невідомий коефіцієнт шкали ($0 < A$);
α – невідомий параметр ВФ ($0 < \alpha < 1$);
β – невідомий параметр ВФ ($0 < \beta < 1$).

Неокласична вартісна *CES*-функція визначається так [2–4]:

$$Y = A_0[A_1K^{-p} + (1 - A_1)L^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}}, \quad (2)$$

де A_0 – невідомий коефіцієнт шкали ($0 < A_0$);
A_1 – невідомий коефіцієнт ваги виробничого фактора ($0 < A_1 < 1$);
p – невідомий параметр ВФ ($-1 < p$);
γ – невідомий показник ступеня однорідності ВФ ($0 < \gamma$).

Традиційне використання ВФ (1), (2), зазвичай, зводиться до розрахунку важливіших економіко-математичних характеристик – середньої і граничної віддачі виробничих ресурсів, еластичності випуску продукції за факторами, потреби в ресурсах, фондоозброєності, граничної норми та еластичності заміщення ресурсів, ступеню однорідності. Окрім того, ВФ Кобба-Дугласа і *CES*-функція застосовуються в якості інструментів максимізації прибутку суб'єктів господарювання, оскільки зростання останнього розглядається як головна мета товарного виробництва.

Вважаємо, що традиційне використання неокласичних двофакторних ВФ (1), (2) суттєво збіднює їх аналітичні можливості. Дійсно, можна вказати, принаймні, два типи нових завдань, вирішення яких представляється принципово можливим на основі розглянутих ВФ.

1. *Визначення оптимальної фондоозброєності та оптимальної граничної норми заміщення ресурсів*, тобто таких, що забезпечують максимальну вартість випуску продукції (робіт, послуг). Річ у тім, що на певних стадіях життєвого циклу суб'єкта господарювання, наприклад, на етапі становлення, на етапі жорсткої конкурентної боротьби за ринки збуту товарів на перший план виходить не підвищення його прибутку, а максимізація загального доходу, тобто вартості випуску продукції. Тому вказане завдання представляється вельми актуальним в умовах намагання України вступити до ЄС. Адже боротьба за ринки збуту неможлива без нарощування випуску високоякісної продукції з мінімальними витратами виробничих фондів і робочої сили.

2. *Оцінка зон беззбиткового інвестування*. Вважаємо, що розв'язання першого завдання дозволить вирішити ще одну важливу задачу фінансової діяльності суб'єктів господарювання – визначити мінімальну (максимальну) величину (залежно від ступеню однорідності ВФ) інвестованого капіталу в уже існуюче виробництво, що, зрештою, забезпечить підвищення ефективності роботи українських товаровиробників.

Вирішення зазначених завдань (пошук рівня оптимальної фондоозброєності та оптимальної граничної норми заміщення ресурсів, а також оцінки зон беззбиткового інвестування) може бути досить успішним на основі використання неокласичних ВФ Кобба-Дугласа і *CES*-функції у вартісному представленні.

Аналіз досліджень і публікацій останніх років. Д. Л. Дебертін (Debertin, 2012) розглядає алгебраїчні умови максимізації неокласичних ВФ на основі аналізу знаків добутків перших та других похідних адитивних і мультиплікативних моделей сільськогосподарського виробництва. Він наводить також геометричне тлумачення наявності локальних екстремумів та глобального максимуму на основі сідлових точок поверхні ВФ. При цьому Д. Л. Дебертін не пов'язує проблему максимізації випуску продукції з визначенням рівня оптимальної фондоозброєності в рамках досліджуваних ВФ [5, с.105–111].

У мікроекономіці (наприклад, в працях Р. Пиндайка, Д. Рабинфельда, В. М. Гальперина (Galperin, 2004), Дж. М. Перлоффа (Perloff, 2014) перше завдання корелює з відомою проблемою пошуку максимальної вартості випуску продукції за умови фіксованого рівня сукупних витрат. Вона є оберненою задачею мінімізації сукупних витрат на певну вартість виробленої продукції в умовах рівноваги виробника [6–8].

У мікроекономіці геометрично показано, що пошук комбінації факторів, яка дозволяє мінімізувати сукупні витрати (максимізувати вартість випуску продукції), базується на суміщенні карти ізоквант та ізокост. У прямій постановці задачі (при мінімізації витрат) шукана точка перебуває на заданій ізокванті, наприклад, Y_2 та максимально наближеній до початку координат ізокості, дотичній до ізокванти (точка B на рис. 1). Координати точки дотику В (K_1, L_1) визначають шукану комбінацію факторів, яка мінімізує сукупні витрати C_1 і максимізує випуск продукції у вартісному вираженні, а співвідношення K_1/L_1 – оптимальну фондоозброєність.

У оберненій постановці задачі (при максимізації випуску продукції) ця точка перебуває на заданій ізокості, наприклад, ABD та максимально віддаленій від початку координат ізокванті Y_2, дотичній до ізокости (точка B на рис. 1).

При дослідженні інвестування у вже існуюче виробництво продукції, що адекватно описується ВФ Кобба-Дугласа, ВФ Кобба-Дугласа-Тінбергена, Є. В. Черевко [4, с.388–390; 9], а також В. О. Янковим [10] виведена формула *оптимальної фондоозброєності FO*, тобто такого розподілу майбутніх загальних витрат C_1 на витрати капіталу K_1 й праці L_1, що максимізує вартість випуску додаткової продукції.

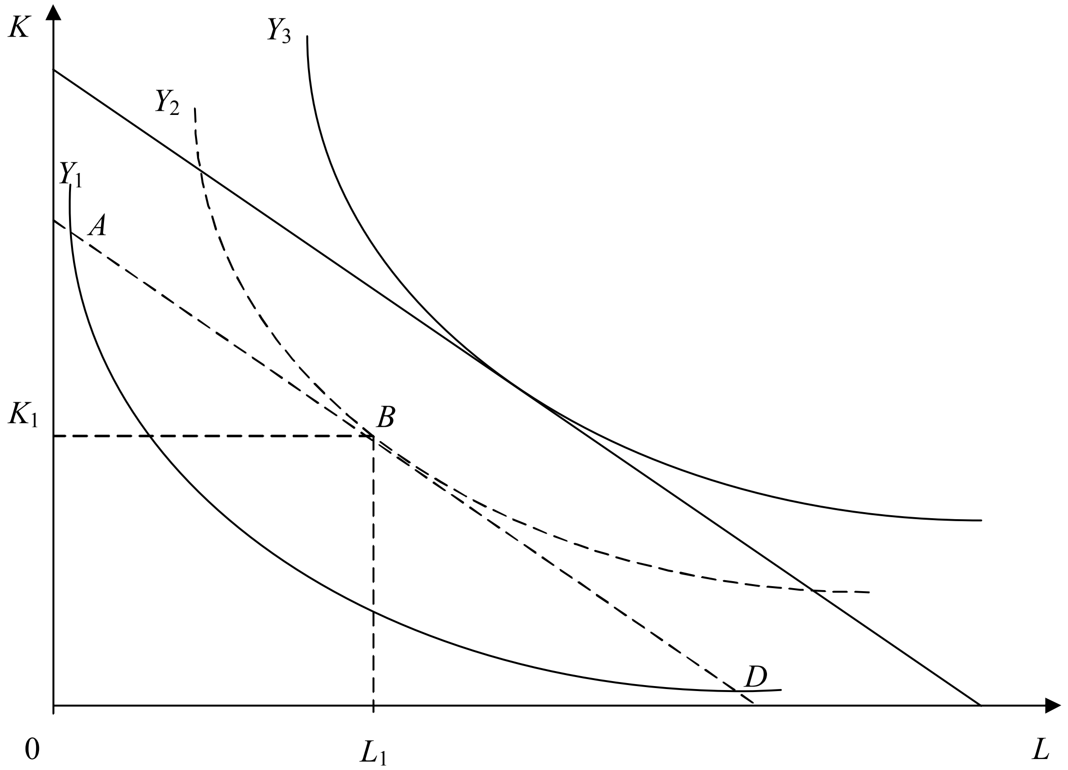

Рис. 1. Пошук оптимальної точки на карті ізоквант та ізокост (ізокості *ABD* відповідають сукупні витрати $C_1 = K_1 + L_1$, а ізокванти задовольняють нерівність $Y_3 > Y_2 > Y_1$) – побудовано автором на основі [6, с.216; 8]

Вона визначається наступним співвідношенням:

$$FO = \frac{K_1}{L_1} = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{3}$$

При цьому максимум додаткової продукції у вартісному вираженні дорівнює:

$$Y_{\max} = \frac{A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}(K_1 + L_1)^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}. \tag{4}$$

Окрім того, в цих же працях було показано, що в умовах інвестування додаткового капіталу $C_1 = K_1 + L_1$ в діюче виробництво у співвідношенні (3) зони беззбитковості визначаються наступною нерівністю:

$$A\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\beta} C_1^{\alpha+\beta-1} \geq 1. \tag{5}$$

При цьому залежно від ступеня однорідності ВФ Кобба-Дугласа (ВФ Кобба-Дугласа-Тінбергена) можливі три випадки.

1. $\alpha + \beta > 1$. За такої ситуації говорять про позитивний ефект розширення масштабів виробництва. При цьому розмір інвестиції, яка забезпечить прибутковість додаткового виробництва, буде обмежений знизу. Із нерівності (5) випливає, що інвестиція буде беззбитковою за умови:

$$C_1 \geq \left[\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}. \quad (6)$$

2. $\alpha + \beta < 1$. У цьому випадку говорять про негативний ефект розширення масштабів виробництва, а розмір інвестиції, яка забезпечить його беззбитковість, в такій ситуації буде обмежений зверху:

$$C_1 \leq \left[\frac{A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}\right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}. \quad (7)$$

3. $\alpha + \beta = 1$ (при лінійній однорідності ВФ Кобба-Дугласа, ВФ Кобба-Дугласа-Тінбергена) спостерігається нульовий ефект розширення масштабів виробництва, тобто прибутковість нового виробництва не залежить від розміру авансованого додаткового капіталу C_1, а визначається певним співвідношенням коефіцієнтів побудованої функції:

$$1 \leq A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}. \quad (8)$$

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Варто відмітити, що в мікроекономіці окрім загального геометричного напряму вирішення поставленої проблеми, що ілюструє рис. 1, відсутні конкретні формули визначення співвідношення K_1/L_1 для певних ВФ, зокрема, для ВФ Кобба-Дугласа і *CES*-функції. Недослідженими в умовах оптимальної фондоозброєності залишаються математико-статистичні параметри вказаних функцій.

Постановка завдання. Мета статті полягає в тому, щоб на основі підходів, викладених у роботах [4, с.388–390; 9; 10], визначити для ВФ (1) в умовах оптимальної фондоозброєності мінімальні загальні витрати капіталу, граничну норму заміщення факторів, рівняння рівноваги виробника. А також для *CES*-функції вивести формули оптимальної фондоозброєності, що максимізує вартість випуску продукції, мінімальні загальні витрати капіталу, граничної норми заміщення факторів, рівняння рівноваги виробника і зони беззбитковості інвестування, аналогічні (4) – (8).

Виклад основного матеріалу дослідження. З урахуванням вираження (3) визначимо мінімальні загальні витрати капіталу для ВФ Кобба-Дугласа у випадку оптимальної фондоозброєності:

1) через задані витрати на оплату праці

$$K = L\frac{\alpha}{\beta}; \quad C = K + L = L(\frac{\alpha}{\beta}+1) = L(FO+1); \quad (9)$$

2) через задані витрати, що спрямовані у виробничі фонди

$$L = K\frac{\beta}{\alpha}; \quad C = L + K = K(\frac{\beta}{\alpha}+1) = K\left(\frac{1}{FO}+1\right). \quad (10)$$

Знайдемо також граничну норму заміщення ресурсів h для ВФ (1) в умовах оптимальної фондоозброєності:

$$h = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 1. \quad (11)$$

Вираження (11) означає, що граничні продукти кожного фактора ВФ Кобба-Дугласа у вартісному представленні при оптимальній фондоозброєності співпадають, тобто рівняння рівноваги виробника приймає вигляд $MP_K = MP_L$, де MP_K, MP_L – граничні продукти виробничих фондів і праці відповідно (від англ. абревіатури *Marginal Product*).

Відомо, що еластичність заміщення факторів σ для ВФ (1) дорівнює одиниці, а для ВФ (2) визначається рівністю $\sigma = 1/(1 + p)$. Отже, ВФ Кобба-Дугласа представляє собою окремий випадок *CES*-функції, тобто може бути отримана з останньої шляхом граничного переходу при $p \to 0$, $\sigma \to 1$. Тоді логічно припустити, що для ВФ (2) в умовах оптимальної фондоозброєності мінімальні загальні витрати капіталу визначається аналогічно формулам (9), (10), гранична норма заміщення ресурсів h теж дорівнює одиниці і для неї справедливе отримане вище рівняння рівноваги виробника $MP_K = MP_L$.

Спробуємо перевірити ці гіпотези для *CES*-функції, побудованої на основі змінних Y, K, L, виражених у вартісному еквіваленті, шляхом визначення оптимальної фондоозброєності, тобто такої, яка за інших рівних умов максимізує випуск продукції Y.

Нехай первісний інвестований капітал у виробництво дорівнює $C = K + L$. Для вирішення поставленого завдання знайдемо L з рівняння зв'язку $L = C - K$, підставимо у вираження (2) і будемо шукати його максимум:

$$Y = A_0[A_1K^{-p} + (1 - A_1)(C - K)^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}} \to \max. \tag{12}$$

Знайдемо критичні точки вираження (12), в яких перші похідні Y' по K дорівнюють 0 або ∞:

$$Y' = \gamma A_0[A_1K^{-p} + (1 - A_1)(C - K)^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}-1} \times [A_1K^{-p-1} - (1 - A_1)(C - K)^{-p-1}]. \tag{13}$$

Очевидно, що $Y' = 0$ або $Y' = \infty$, коли один із співмножників вираження (13) дорівнює 0. Розглянемо обидва випадки:

$$\begin{aligned} &1. \quad A_1K^{-p} + (1 - A_1)(C - K)^{-p} = 0. \\ &2. \quad A_1K^{-p-1} - (1 - A_1)(C - K)^{-p-1} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Знайдемо рішення першого рівняння (14):

$$FO_1 = \frac{K}{L} = \left(-\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{15}$$

де FO_1 – фондоозброєність для першого випадку.

Виразимо капітал K із співвідношення (15) і підставимо його в формулу (2) з метою визначення максимального випуску продукції Y:

$$K = L\left(-\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{p}}; \quad Y_{\max} = A_0[-(1 - A_1)L^{-p} + (1 - A_1)L^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}}. \tag{16}$$

Оскільки у першому випадку $Y_{\max} = 0$ при будь-яких значеннях коефіцієнтів *CES*-функції, то точка FO_1, що визначається формулою (15), не є точкою її екстремуму.

Знайдемо рішення другого рівняння (14):

$$FO_2 = \frac{K}{L} = \left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} = \left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\sigma}, \tag{17}$$

де FO_2 – фондоозброєність для другого випадку.

Підставляючи вираження капіталу K із (17) в формулу (2) з метою визначення максимального випуску продукції Y, у результаті елементарних перетворень отримаємо:

$$K = L\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{p+1}}; Y_{\max} = A_0 L^{\gamma}(1-A_1)^{-\frac{\gamma}{p}}\left[\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{p+1}} + 1\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} = A_0 L^{\gamma}[(1-A_1)(FO_2+1)]^{-\frac{\gamma}{p}}. \quad (18)$$

Так як у другому випадку $Y_{\max} = 0$ лише при певних значеннях коефіцієнтів *CES*-функції ($A_0 = 0$; $A_1 = 1$), які не належать до області визначення коефіцієнтів неокласичної ВФ (2), то точка FO_2, що розраховується за формулою (17), є точкою її екстремуму.

Отже, для забезпечення максимального випуску продукції у вартісному вираженні на виробництві, що описується *CES*-функцією, фондоозброєність має визначатись з урахуванням формули (17), яку за аналогією з формулою (3) будемо називати *оптимальною* фондо*озброєністю* для ВФ (2).

З урахуванням вираження (17) визначимо мінімальні загальні витрати капіталу для *CES*-функції у випадку оптимальної фондоозброєності:

1) через задані витрати на оплату праці

$$K = L\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right); \quad C = K + L = L\left[\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\sigma} + 1\right] = L(FO_2 + 1); \quad (19)$$

2) через задані витрати, що спрямовані у виробничі фонди

$$L = K\left(\frac{1-A_1}{A_1}\right)^{\sigma}; \quad C = L + K = K\left[\left(\frac{1-A_1}{A_1}\right)^{\sigma} + 1\right] = K\left(\frac{1}{FO_2} + 1\right). \quad (20)$$

Порівняння мінімальних загальних витрат капіталу (19), (20) для *CES*-функції з формулами (9), (10) для ВФ Кобба-Дугласа показує, що в умовах оптимальної фондоозброєності вони визначаються цілком аналогічно через величини FO_2, FO.

Підставимо тепер значення оптимальної фондоозброєності з формули (17) у вираження граничної норми заміщення ресурсів h для ВФ (2):

$$h = \frac{1-A_1}{A_1}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+p} = \frac{1-A_1}{A_1}\left[\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}\right]^{1+p} = 1. \quad (21)$$

Отриманий результат співпадає з вираженням (11), тобто висунуті гіпотези повністю підтвердились. Із формули (21) виплиcає, що рівняння рівноваги виробника для *CES*-функції в умовах оптимальної фондоозброєності теж має вигляд $MP_K = MP_L$. Це означає, що обидві неокласичні ВФ, що розглядаються, поводять себе в екстремальних ситуаціях тотожно.

Особливий інтерес представляє використання побудованої функції (2) з метою прийняття управлінських рішень щодо додаткової інвестиції $C_1 = K_1 + L_1$ у виробництво за умови її потенційної беззбитковості. Очевидно, якщо всі змінні *CES*-функції представлені у вартісному вираженні, то різниця $Y_1 - C_1 = p(C_1)$ визначає величину прибутку, отриманого в результаті інвестування. У випадку, коли цей процес адекватно описується *CES*-функцією, величина $p(C_1)$ дорівнює:

$$p(C_1) = A_0[A_1 K_1^{-p} + (1-A_1)L_1^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}} - C_1. \quad (22)$$

Зрозуміло, що зона беззбитковості інвестування у виробництво додаткового капіталу C_1 випливає з формули (22), коли $p(C_1) \geq 0$. Відразу відмітимо, що величини K_1, L_1 будемо визначати у відношенні оптимальної фондоозброєності (17), тобто за наступних умов:

$$K_1 = L_1 \frac{A_1^{\sigma}}{(1-A_1)^{\sigma}}; \quad L_1 = K_1 \frac{(1-A_1)^{\sigma}}{A_1^{\sigma}}; \quad K_1 + L_1 = C_1. \tag{23}$$

Виразимо величини K_1, L_1 через C_1:

$$K_1 = C_1 \frac{A_1^{\sigma}}{A_1^{\sigma} + (1-A_1)^{\sigma}}; \quad L_1 = C_1 \frac{(1-A_1)^{\sigma}}{A_1^{\sigma} + (1-A_1)^{\sigma}}. \tag{24}$$

Позначимо

$$\frac{A_1^{\sigma}}{A_1^{\sigma} + (1-A_1)^{\sigma}} = N; \quad \frac{(1-A_1)^{\sigma}}{A_1^{\sigma} + (1-A_1)^{\sigma}} = M. \tag{25}$$

Тоді з урахуванням співвідношень (24), (25) можна записати:

$$K_1 = NC_1, L_1 = MC_1, N + M = 1.$$

Очевидно, що для останнього вираження виконуються всі умови (23). Підставимо отримані значення K_1, L_1 у формулу прибутку (22), який будемо вважати не негативним, і після елементарних перетворень отримаємо:

$$p(C_1) = A_0 C_1^{\gamma} [A_1 N^{-p} + (1-A_1) M^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}} - C_1 \geq 0. \tag{26}$$

Звідси випливає базова нерівність, виконання якої забезпечує беззбитковість додаткового інвестування у виробництво:

$$C_1^{\gamma-1} \geq \frac{[A_1 N^{-p} + (1-A_1) M^{-p}]^{\frac{\gamma}{p}}}{A_0}. \tag{27}$$

Залежно від значення показника ступеня однорідності *CES*-функції γ можливі три випадки:

1. $\gamma > 1$, тобто при позитивному ефекті розширення масштабів виробництва точка і зона беззбитковості на основі (27) визначаються нерівністю:

$$C_1 \geq \left\{ \frac{[A_1 N^{-p} + (1-A_1) M^{-p}]^{\frac{\gamma}{p}}}{A_0} \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{28}$$

Це означає, що для забезпечення беззбиткового виробництва величина мінімальної інвестиції C_1 має задовольняти нерівність (28).

2. $\gamma < 1$, тобто при негативному ефекті розширення масштабів виробництва точка і зона беззбитковості за допомогою формули (27) визначаються нерівністю:

$$C_1 \leq \left\{ \frac{A_0}{[A_1 N^{-p} + (1-A_1) M^{-p}]^{\frac{\gamma}{p}}} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{29}$$

Це означає, що для забезпечення беззбиткового виробництва величина максимальної інвестиції C_1 має задовольняти нерівність (29).

3. γ = 1 (при лінійній однорідності *CES*-функції) спостерігається нульовий ефект від розширення масштабів виробництва, тобто воно буде беззбитковим за будь-якої величини авансованого капіталу C_1. Однак, беззбитковість у цьому випадку забезпечується певним співвідношенням коефіцієнтів побудованої ВФ. Згідно з базовою нерівністю (27), необхідно, щоб параметри *CES*-функції задовольняли наступну нерівність:

$$A_0 \geq [A_1 N^{-p} + (1 - A_1) M^{-p}]^{-\frac{1}{p}}. \qquad (30)$$

Висновки і перспективи подальших розробок. На основі формул (11), (21) можна стверджувати, що гранична норма заміщення ресурсів ВФ Кобба-Дугласа і *CES*-функції в умовах оптимальної фондоозброєності дорівнює 1, а їх граничні продукти співпадають, тобто рівняння рівноваги виробника в цьому випадку має вигляд $MP_K = MP_L$. Це означає, що одна грошова одиниця (100, 1000, 10000 … грн.), спрямована у виробничі фонди, буде в цьому випадку забезпечувати зменшення витрат праці на аналогічну грошову одиницю за умови незмінності випуску продукції. А невиконання співвідношення h = 1, яке випливає із формул (11), (21), можна розглядати як сигнал про порушення оптимальної фондоозброєності, тобто про певні диспропорції при вкладенні коштів у агреговані виробничі фактори «капітал» і «праця».

Так, якщо h > 1, то це буде свідчити про те, що фактична фондоозброєність перевищує оптимальну, яка визначається формулою (3) для ВФ Кобба-Дугласа, і формулою (17) для *CES*-функції. У цьому випадку можна говорити про надмірні витрати капіталу, що спрямований у виробничі фонди, порівняно з коштами на оплату праці. Тобто суб'єкту господарювання, наприклад, підприємству, варто скоротити основні виробничі фонди, витрати на сировину, матеріали тощо, або підвищити фонд оплати праці за рахунок залучення додаткових робітників, посилення їх матеріального стимулювання. Зрозуміло, що в ситуації h < 1 управлінські рекомендації дзеркально протилежні: підприємству необхідно нарощувати фондоозброєність живої праці.

Вважаємо, що формули оптимальної фондоозброєності (3), (17) і виведені на їх основі мінімальні загальні витрати капіталу (9), (10), (19), (20), одинична гранична норма заміщення ресурсів, рівняння рівноваги виробника можуть служити додатковими корисними характеристиками при застосуванні ВФ Кобба-Дугласа та *CES*-функції в процесі економіко-математичного моделюванні випуску продукції.

Очевидно, що виконання нерівностей (6) – (8) для ВФ Кобба-Дугласа і (28) – (30) для *CES*-функції прямо залежить від величини коефіцієнтів шкали A (A_0). Малі значення даних параметрів, отриманих в економетричному дослідженні, сигналізують про негативний стан економіки суб'єкта господарювання (підприємства, галузі, регіону, країни), в першу чергу, за рахунок зовнішнього оточення – недосконалості законодавства і податкової політики держави. Саме переважно фіскальний характер існуючої податкової політики держави по відношенню до малого і середнього бізнесу проявляються при розрахунках ВФ (1), (2) у низьких значеннях коефіцієнтів шкали A (A_0).

У якості перспектив подальших досліджень варто розглядати диференційний аналіз поведінки двофакторних ВФ в умовах оптимальної фондоозброєності, які не належать до неокласичних, наприклад, функцій Леонт'єва, Аллена, Солоу, багаторежимної функції та інших виробничих функцій.

Література

1. *Казакова М. В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста [Электронный ресурс] / М. В. Казакова. – Режим доступа: ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf.*

2. *Подладчиков В. Н. Микроэкономика. Производственные функции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm.*
3. *Янковий В. О. Виробнича функція з постійною еластичністю заміщення ресурсів / В. О. Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса, ОНЕУ. – 2015. – № 58. – С. 228–234.*
4. *Економетрія: навч. посіб. / [За ред. А. Ф. Кабака, О. В. Проценка]. – Одеса: НМЦО-ОДЕУ, 2003. – 562 с.*
5. *Debertin D. L. Agricultural Production Economics. Amazon Createspace / D. L. Debertin. – 2012. – 413 p.*
6. *Пиндайк Р. Микроэкономика / [Р. Пиндайк, Д. Рабинфельд; пер. с англ. С. Жильцов, А. Железниченко]. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.*
7. *Гальперин В. М. Микроэкономика: в 2-х томах / В. М. Гальперин, С. М. Игнатьев, В. И. Моргунов. – СПб: Институт «Экономическая школа», 2004. – 482 с.*
8. *Perloff J. M. (2014). Microeconomics. Chapter 7: Costs [Electronic source] / J. M. Perloff. – Access: http://wps.aw.com/bp_perloff_microecon_7/242/61990/15869495.cw/content/index.html*
9. *Черевко Є. В. Оптимальна фондоозброєність та початковий капітал / Є. В. Черевко // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса, ОДЕУ. – 2007. – № 26. – С. 359–365.*
10. *Янковий В. О. Прогнозування зони беззбитковості інвестицій у хлібопекарську промисловість за допомогою виробничої функції / В. О. Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса: ОДЕУ. – 2006. – № 22. – С. 410–414.*

References
1. *Kazakova, M. V. (2011), Analysis of the properties of production functions used in the decomposition of economic growth [Analiz svoystv proizvodstvennykh funktsiy, ispolzuemykh pri dekompozitsii ekonomicheskogo rosta], available at: ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf (rus)*
2. *Podladchikov, V. N. (2013), Microeconomics. Production functions [Mikroekonomika. Proizvodstvennye funktsii], available at: http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm (rus)*
3. *Yankovyi, V. O. (2015), Production function with constant elasticity of substitution [Vyrobnycha funktsiia z postiinoiu elastychnistiu zamishchennia resursiv], Socio-economic research bulletin, ONEU, Odessa, No. 58, pp. 228–234 (ukr)*
4. *Ekonometriya (2003). Ed. by A. F. Kabak, O. V. Protsenko [Econometrics; za red. A. F. Kabaka, O. V. Protsenka], NMTSO-OSEU, Odessa, 562 p. (ukr)*
5. *Debertin, D. L. (2012), Agricultural production economics. Amazon Createspace, 413 p.*
6. *Pindyck, R., Rubinfeld, D. (2002), Microeconomics. Trans. from Eng. S. Zhiltsov, A. Zheleznichenko [Mikroekonomika; per. s angl. S. Zhiltsova, A. Zheleznichenko], Piter, St. Petersburg, 608 p. (rus)*
7. *Galperin, V. M., Ignatyev, S. M., Morgunov, V. I. (2004), Microeconomics [Mikroekonomika], St. Petersburg, Institute of «Economics School», 482 p. (rus)*
8. *Perloff, J. M. (2014), Microeconomics. Chapter 7: Costs, available at: http://wps.aw.com/bp_perloff_microecon_7/242/61990/15869495.cw/content/index.html.*
9. *Cherevko, Ye. V. (2007), The optimal capital-labor ratio and initial capital [Optimalna fondoozbroenist ta pochatkoviy kapital], Socio-economic research bulletin, ONEU, Odessa, No. 26, pp. 359–365 (ukr)*
10. *Yankovyi, V. O. (2006), Prediction of the breakeven investment zone in the baking industry by means of the production function [Prohnozuvannia zony bezzbytkovosti investytsiy u khlibopekarsku promyslovist za dopomohoiu vyrobnychoi funktsii], Socio-economic research bulletin, ONEU, Odessa, No. 22, pp. 410–414 (ukr)*

Стаття надійшла до редакції 13.05.2016.