

УДК 330.356.7:64.04.3

### **Володимир Олександрович ЯНКОВИЙ**

кандидат економічних наук, доцент кафедри економіки та управління національним господарством, Одеський національний економічний університет,  
e-mail: vladimir\_ya@ukr.net

## **ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ З ПОСТІЙНОЮ ЕЛАСТИЧНІСТЮ ЗАМІЩЕННЯ РЕСУРСІВ**

*Янковий, В. О. Виробнича функція з постійною еластичністю заміщення ресурсів / Володимир Олександрович Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень: зб. наук. праць; за ред. М. І. Зверякова (голов. ред.) та ін. (ISSN 2313-4569). – Одеса: Одеський національний економічний університет. – 2015. – Вип. 3. – № 58. – С. 228–234.*

**Анотація.** У статті досліджено переваги виробничої функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів (CES-функції) і можливість її застосування в економічних розрахунках. Наведено найважливіші економіко-математичні параметри CES-функції та розглянуто програмні засоби оцінки її невідомих коефіцієнтів. Визначено оптимальну фондоозброєність, що забезпечує максимізацію випуску продукції. Показано, що в цьому випадку гранична норма заміщення ресурсів дорівнює одиниці. Запропоновано нове її тлумачення як індикатора диспропорцій при вкладенні коштів в агреговані фактори «капітал» і «праця». Виведена на основі оптимальної фондоозброєності гранична норма заміщення ресурсів може служити важливою додатковою характеристикою при застосуванні виробничої функції в процесі аналізу випуску продукції на підприємствах України.

**Ключові слова:** CES-функція; оптимізація; фондоозброєність; гранична норма; заміщення ресурсів.

### **Владимир Александрович ЯНКОВОЙ**

кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики и управления национальным хозяйством, Одесский национальный экономический университет,  
e-mail: vladimir\_ya@ukr.net

## **ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ЗАМЕЩЕНИЯ РЕСУРСОВ**

*Янковой, В. А. Производственная функция с постоянной эластичностью замещения ресурсов / Владимир Александрович Янковой // Вестник социально-экономических исследований: сб. науч. трудов; под ред. М. И. Зверякова (глав. ред.) и др. (ISSN 2313-4569). – Одесса: Одесский национальный экономический университет. – 2015. – Вып. 3. – № 58. – С. 228–234.*

**Аннотация.** В статье исследованы преимущества производственной функции с постоянной эластичностью замещения ресурсов (CES-функции) и возможность ее применения в экономических расчетах. Приведены важнейшие экономико-математические параметры CES-функции, рассмотрены программные средства оценки ее неизвестных коэффициентов. Определена оптимальная фондовооруженность, обеспечивающая максимизацию выпуска продукции. Показано, что в этом случае предельная норма замещения ресурсов равна единице. Предложено новое ее толкование как индикатора диспропорций при вложении средств в агрегированные факторы «капитал» и «труд». Выведенная на основе оптимальной фондовооруженности предельная норма замещения ресурсов может служить важной дополнительной характеристикой при применении производственной функции в процессе анализа выпуска продукции на предприятиях Украины.

**Ключевые слова:** CES-функция; оптимизация; фондовооруженность; предельная норма; замещение ресурсов.

### **Volodymyr YANKOVYI**

PhD in Economics, Associate Professor, Department of Economics and Management of National Economy, Odessa National Economic University, e-mail: vladimir\_ya@ukr.net

## PRODUCTION FUNCTION WITH CONSTANT ELASTICITY OF SUBSTITUTION RESOURCES

*Yankovyi, V. (2015), Production function with constant elasticity of substitution resources. Ed.: M. Zveryakov (ed.-in-ch.) and others [Vyrobnycha funktsiia z postiinoiu elastychnistiu zamishchemia resursiv; za red. M. I. Zveriakova (gol. red.) ta in.], Socio-economic research bulletin (ISSN 2313-4569), Odessa National Economic University, Odessa, Issue 3, No. 58, pp. 228–234.*

**Abstract.** *The advantages of the production function with constant elasticity of substitution of resources (CES-function) and the possibility of its use in economic calculations are investigated in the article. The most important economic and mathematical parameters of CES-function and software its unknown factors evaluation are discussed. The optimal capital-maximizing output is determined. It is shown that in this case the marginal rate of substitution of resources equals to one. A new interpretation of it as an indicator of imbalances when investing in aggregate factors «capital» and «labor» is proposed. Deduced marginal rate of substitution of resources based on the optimal capital-labor ratio can be used as an important additional feature when applying the production function in the analysis output in the enterprises of Ukraine.*

**Keywords:** *CES-function; optimization; capital-labor ratio; marginal rate; substitution of the resources.*

**JEL classification:** *C210, C220, D240*

**Постановка проблеми у загальному вигляді.** В останній час серед дослідників, що займаються економіко-математичним моделюванням, підвищився інтерес до використання двохфакторних виробничих функцій (ВФ). Серед них найбільш популярною і добре вивченою є ВФ Кобба-Дугласа, коефіцієнти якої легко оцінюються за умови попереднього логарифмування вихідних даних, а математико-статистичні параметри піддаються зрозумілому економічному тлумаченню. Між тим, відомо, що ВФ Кобба-Дугласа має низку суттєвих недоліків, зокрема, в її рамках передбачається еластичність заміщення ресурсів (праці  $L$  і капіталу  $K$ ) на рівні 1%. Тобто зростання капіталу, спрямованого у виробничі фонди, на один відсоток дозволяє знизити витрати праці також на один відсоток і, навпаки. Це дуже жорстке припущення, яке в реальній економічній дійсності, взагалі кажучи, ніколи не виконується.

Окрім того, легко показати наступне [1]: якщо фондоозброєність  $K/L$  прямує у нескінченність, то продуктивність праці при будь-яких допустимих значеннях параметрів ВФ Кобба-Дугласа теж прямує в нескінченність. Вважається, що необмеженість продуктивності праці залежно від фондоозброєності у рамках ВФ Кобба-Дугласа є одним із недоліків її застосування в економічних дослідженнях.

Указані моменти сигналізують про певну небезпеку отримання неадекватної економетричної моделі при практичному використанні ВФ Кобба-Дугласа, а також про необхідність застосовувати інші відомі ВФ, наприклад, функцію з постійною еластичністю заміщення ресурсів або *CES*-функцію (від англ. абревіатури Constant Elasticity of Substitution). *CES*-функція може бути представлена в наступному вигляді:

$$Y = A[aK^{-p} + (1-a)L^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}}. \quad (1)$$

- де  $Y$  – випуск продукції у вартісному вираженні;
- $K$  – вартість капіталу, що спрямований у виробничі фонди;
- $L$  – витрати капіталу на оплату праці;
- $A$  – невідомий коефіцієнт шкали;
- $a$  – невідомий коефіцієнт ваги виробничого фактора;
- $p$  – невідомий параметр виробничої функції;
- $\gamma$  – невідомий показник ступеня однорідності.

Для функції (1) еластичність заміщення ресурсів  $\sigma$  визначається наступним чином:

$$\sigma = \frac{1}{1+p}. \quad (2)$$

*CES*-функція залежно від значення параметра  $p$  узагальнює інші ВФ [2-4]:

- 1) при  $p = -1$  отримаємо лінійну функцію (еластичність заміщення ресурсів  $\sigma = \infty$ );
- 2) при  $p \rightarrow 0$  вираження (1) перетворюється у ВФ Кобба-Дугласа (еластичність заміщення ресурсів  $\sigma \rightarrow 1$ );
- 3) при  $p \rightarrow \infty$  *CES*-функція прямує до функції Леонт'єва (еластичність заміщення ресурсів  $\sigma \rightarrow 0$ ).

Отже, в рамках ВФ (1) величина  $\sigma$  може приймати будь-яке, хоча й постійне значення, що впливає з її назви. Така ситуація більш відповідає реальній економічній дійсності, ніж при використанні ВФ Кобба-Дугласа ( $\sigma = 1$ ). При цьому продуктивність праці при будь-яких допустимих значеннях параметрів *CES*-функції в умовах  $K/L \rightarrow \infty$  залишається обмеженою.

Таким чином, існує щонайменше два суттєвих об'єктивних аргументи для того, щоб в процесі економіко-математичного моделювання віддати перевагу саме *CES*-функції як більш адекватному інструменту аналізу й прогнозування. У зв'язку з цим виникає низка питань: коли досліднику варто робити вибір на користь ВФ (1)? Якими властивостями володіють параметри *CES*-функції? Як їх практично оцінити?

**Аналіз досліджень і публікацій останніх років.** Хоча проблеми, окреслені вище, не є новими (їх наукове обговорення почалося в 70-х роках ХХ ст.), проте, чітких відповідей на поставлені запитання в сучасній економічній літературі не існує.

Так, В. В. Вітлінський зазначає: «Функція *CES* застосовується у випадку відсутності точної інформації щодо рівня взаємозаміни виробничих чинників, і, разом з тим, є підстави вважати, що цей рівень суттєво не зміниться за зміни обсягів залучених ресурсів, тобто коли економічна технологія має властивість певної стійкості щодо певних пропорцій чинників. Функція *CES* (за наявності засобів оцінки її параметрів) може використовуватися для моделювання систем будь-якого рівня» [5]. Аналогічну позицію з цього приводу займають А. В. Артемова [6], М. В. Бондар [7], Д. Н. Боровской [8, с.173–174], С. С. Шумська [9, с.140] та ін., які дослівно наводять тезу В. В. Вітлінського.

У працях [2–9] наведені окремі властивості, якими володіють параметри *CES*-функції, однак систематизованої інформації за даною проблемою явно бракує. Вважаємо, що така ситуація пояснюється певними обчислювальними труднощами при практичному застосуванні ВФ (1) в економічних дослідженнях.

**Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми.** Справа в тому, що невідомі параметри *CES*-функції підлягають оцінюванню за відомими значеннями показників  $Q$ ,  $K$ ,  $L$ , взятими із бухгалтерської та фінансової звітності досліджуваних суб'єктів господарювання. Однак, варто зауважити, що вираження (1) принципово неможливо привести до лінійного вигляду і, отже, використати звичайні методи оцінки невідомих коефіцієнтів. Тому, в даному випадку необхідно застосовувати методи приблизного ітеративного оцінювання, наприклад, нелінійний метод найменших квадратів. Указана обставина зазвичай гальмує широке розповсюдження *CES*-функції в економічних дослідженнях.

Окрім того, такі питання, як оптимізація фондоозброєності, тобто визначення часток інвестованого капіталу, спрямованого у виробничі фонди і працю за критерієм «випуск продукції» залишаються не вирішеними в теорії ВФ. Між тим, цей аспект набуває певної актуальності в умовах жорсткої конкурентної боротьби в усіх галузях світового господарства, загострення проблеми підвищення конкурентоздатності вітчизняних товаровиробників у зв'язку з намаганням України вступити до ЄС. Адже боротьба за ринки

збуту неможлива без нарощування випуску високоякісної продукції з мінімальними витратами виробничих фондів і робочої сили.

**Постановка завдання.** Метою статті є узагальнення економіко-математичних властивостей параметрів ВФ (1), визначення практичних шляхів їх статистичного оцінювання, знаходження величини оптимальної фондоозброєності, що максимізує випуск продукції суб'єктів господарювання. А також дослідження граничної норми заміщення ресурсів виробництва, що адекватно описується CES-функцією в умовах оптимальної фондоозброєності.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** В табл. 1 наведено найважливіші економіко-математичні параметри CES-функції, розрахунок яких дозволить отримати узагальнені характеристики виробництва в середньому по сукупності суб'єктів господарювання або в середньому за певний період для окремого підприємства у випадку застосування часових рядів економічних даних.

Таблиця 1

Основні економіко-математичні характеристики CES-функції (розроблено автором)

Показник	$K$	$L$
1. Середня віддача	$\frac{Y}{K} = AK^{\gamma-1} [a + (1-a) \left(\frac{L}{K}\right)^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}}$	$\frac{Y}{L} = AL^{\gamma-1} [a \left(\frac{K}{L}\right)^{-p} + (1-a)]^{-\frac{\gamma}{p}}$
2. Гранична віддача	$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{a}{A^p} \left(\frac{Y}{K}\right)^{1+p}$	$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1-a}{A^p} \left(\frac{Y}{L}\right)^{1+p}$
3. Еластичність випуску продукції, %	$\frac{a}{A^p} \left(\frac{Y}{K}\right)^p$	$\frac{1-a}{A^p} \left(\frac{Y}{L}\right)^p$
4. Потреба в ресурсах	$K = \left[ \left(\frac{Y}{A}\right)^{-\frac{p}{\gamma}} - (1-a)L^{-p} \right]^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{a^{\frac{1}{p}}}$	$L = \left[ \left(\frac{Y}{A}\right)^{-\frac{p}{\gamma}} - aK^{-p} \right]^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{a^{\frac{1}{p}}}$
5. Заміщення ресурсів (фондоозброєність)	$\frac{K}{L} = \left[ \frac{\left(\frac{Y}{A}\right)^{-\frac{p}{\gamma}} - aK^{-p}}{\left(\frac{Y}{A}\right)^{-\frac{p}{\gamma}} - (1-a)L^{-p}} \right]^{\frac{1}{p}}$	
6. Гранична норма заміщення ресурсів	$h = \frac{1-a}{a} \left(\frac{K}{L}\right)^{1+p}$	
7. Еластичність заміщення ресурсів, %	$\sigma = \frac{1}{1+p}$	
8. Ступінь однорідності	$\gamma$	

Варто пам'ятати, що CES-функція належить до неокласичних ВФ, якщо  $0 < A$ ;  $0 < a < 1$ ,  $-1 < p$ ;  $0 < \gamma$ . Ці умови впливають із припущення про постійне убавання граничної віддачі виробничих ресурсів  $K$  і  $L$ . Вони базуються на теорії поведінки споживача, оскільки відносно ресурсів будь-який суб'єкт господарювання (підприємство, галузь, регіон) є споживачем і ВФ характеризує саме цей аспект – виробництво як споживання.

Що ж стосується проблеми оцінювання невідомих коефіцієнтів ВФ (1), то, вважаємо, що найбільш конструктивним представляється підхід до апроксимації CES-функції, запропонований Дж. Кментой. Він заснований на логарифмуванні вираження (1) і розкладанні результату в ряд Тейлора з подальшим застосуванням до отриманої наближеної моделі методів кореляційно-регресійного аналізу [10].

М. Кубініва та ін., використовуючи підхід Кменти в якості інструменту знаходження первісної оцінки параметрів *CES*-функції, розробили процедуру пошуку рішення поставленого завдання із заданою точністю на базі використання ітеративного алгоритму мінімізації цільової функції залишків моделі за методом Марквардта. Вказана процедура знайшла своє втілення в програмі MACRO6, написаної на мові Бейсік [11, с.137–149], яка досить легко адаптується до сучасного програмного забезпечення за допомогою макросів редактора Excel.

Припустимо тепер, що фондоозброєність виробництва є оптимальною, тобто такою, що загальний інвестований капітал  $C = K + L$  забезпечує максимальний випуск продукції  $Y$ . Виведемо формулу оптимальної фондоозброєності в умовах інвестування грошового капіталу  $C$  у виробництво продукції, яке описується *CES*-функцією.

Для вирішення поставленого завдання знайдемо  $L$  з рівняння зв'язку  $L = C - K$ , підставимо у вираження (1) і будемо шукати його максимум, застосовуючи підхід, викладений у роботах [1; 12]:

$$Y = A[\alpha K^{-p} + (1-\alpha)(C-K)^{-p}]^{-\frac{1}{p}} \rightarrow \max. \quad (3)$$

Знайдемо критичні точки функції (3), в яких перші похідні  $Y'$  по  $K$  дорівнюють 0 або  $\infty$ . Після елементарних перетворень отримаємо наступний результат:

$$\frac{K}{L} = \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1+p}}. \quad (4)$$

Підставляючи вираження капіталу  $K$  із (4) у формулу (1) з метою визначення максимального випуску продукції  $Y$ , отримаємо:

$$K = L \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1+p}}; \quad Y \max = AL^{\frac{1}{p}} \left[ (1-\alpha) \left( \frac{K}{L} + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

Отже, для забезпечення максимального випуску продукції у грошовому вираженні в умовах інвестування деякої постійної суми грошового капіталу у виробництво, що описується *CES*-функцією, фондоозброєність повинна визначатись за формулою (4), яку будемо називати оптимальною фондоозброєністю для ВФ (1) за критерієм «випуск продукції».

Підставимо тепер значення оптимальної фондоозброєності із формули (4) у вираження, яке визначає граничну норму заміщення ресурсів  $h$  (див. рядок 6 табл.):

$$h = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \frac{K}{L} \right)^{1+p} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left[ \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1+p}} \right]^{1+p} = 1. \quad (6)$$

На основі отриманої формули (6) можна стверджувати, що гранична норма заміщення ресурсів *CES*-функції в умовах оптимальної фондоозброєності повинна дорівнювати 1. За визначенням це означає, що одна грошова одиниця (100, 1000, 10000 ... грн.), спрямована у виробничий капітал, буде в цьому випадку забезпечувати зменшення витрат праці на точно таку ж грошову одиницю за умови незмінності випуску продукції. А невиконання співвідношення  $h = 1$ , яке впливає із формули (6), можна розглядати як сигнал про порушення оптимальної фондоозброєності, тобто про певні диспропорції при інвестуванні коштів у агреговані виробничі фактори «капітал» і «праця».

Так, якщо  $h > 1$ , то це буде свідчити про те, що фактична фондоозброєність перевищує оптимальну, яка визначається формулою (4) для ВФ (1). У цьому випадку можна говорити про надмірні витрати капіталу, що спрямований у виробничі фонди, порівняно з коштами на оплату праці. Тобто суб'єкту господарювання, наприклад, підприємству, варто скоротити основні виробничі фонди, витрати на сировину, матеріали тощо. Або підвищити фонд оплати праці за рахунок залучення додаткових працівників, посилення їх матеріального стимулювання. Зрозуміло, що в ситуації  $h < 1$  управлінські рекомендації дзеркально протилежні: підприємству потрібно нарощувати фондоозброєність живої праці.

**Висновки і перспективи подальших розробок.** Вважаємо, що наведена вище таблиця основних економіко-математичних характеристик CES-функції дозволить дослідникам краще уявляти її аналітичний і прогностичний потенціал в економіко-математичному моделюванні виробництва. А відносно прості обчислювальні процедури Кменти і Кубініви відкриють реальну можливість оцінювати невідомі параметри ВФ (1) з наперед заданою точністю.

Оптимальна фондоозброєність (4) і виведена на її основі гранична норма заміщення ресурсів  $h = 1$  можуть служити додатковими корисними характеристиками при застосуванні CES-функції в процесі вивчення залежності випуску продукції від виробничих факторів на вітчизняних підприємствах промисловості та АПК.

### Література

1. Янковий В. О. Порівняння властивостей виробничої функції Кобба-Дугласа і CES-функції / В. О. Янковий // Матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. «Економіка сталого розвитку: теоретичні підходи та практичні рекомендації». – Кошице, Словаччина, 13–16 вересня 2015 р. – С. 149–150.
2. Економетрія: навч. посіб. / [за ред. А. Ф. Кабака, О. В. Проценка]. – Одеса: НМЦО-ОДЕУ, 2003. – 562 с.
3. Подладчиков В. Н. Микроэкономика. Производственные функции [Электронный ресурс] / В. Н. Подладчиков. – Режим доступа: <http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm>.
4. Казакова М. В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста [Электронный ресурс] / М. В. Казакова. – Режим доступа: <ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf>.
5. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: навч. посіб. [Електронний ресурс] / В. В. Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с. – Режим доступу: <http://fingal.com.ua/content/view/202/39>.
6. Артемова А. В. Методика оценивания затрат при производстве продукции [Электронный ресурс] / А. В. Артемова, М. А. Грищенко, Д. В. Лисняк. – Режим доступа: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/piprp\\_2014\\_1\\_3](http://nbuv.gov.ua/UJRN/piprp_2014_1_3).
7. Бондар М. Виробничі функції в економіко-математичному моделюванні [Електронний ресурс] / М. Бондар, А. Махлай. – Режим доступу: [http://www.rusnauka.com/14\\_ENXXI\\_2014/Matematics/4\\_169090.doc.htm](http://www.rusnauka.com/14_ENXXI_2014/Matematics/4_169090.doc.htm).
8. Боровской Д. Н. Производственные функции и проблема выбора экономико-математической модели активного элемента / Д. Н. Боровской // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 1 (28). – С. 172–177.
9. Шумська С. С. Виробнича функція в економічному аналізі: теорія і практика використання / С. С. Шумська // Економіка прогнозування. – 2007. – № 2. – С. 138–153.
10. Kmenta J. On Estimation of the CES Production Function / J. Kmenta // International Economic Review. – 1967. – Vol. 8. – No. 2. – Pp. 180–189.
11. Математическая экономика на персональном компьютере / [М. Кубинива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ; под ред. М. Кубинива; пер. с япон.]. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.



12. Янковий В. О. Прогнозування зони беззбитковості інвестицій у хлібопекарську промисловість за допомогою виробничої функції / В. О. Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень: зб. наук. праць. – Одеса: Одеський національний економічний університет. – 2006. – № 22. – С. 410–414.

### References

1. Yankovyi, V. O. (2015), «Comparison of the properties of the Cobb-Douglas production function and CES-function»: Proceedings of Intern. scientific and practical conf. «Economics of Sustainable Development: theoretical approaches and practical recommendations» (13–16 Sept. 2015) [Porivniannia vlastyvostei vyrobnychoi funktsii Kobba-Duhlasy i CES-funktsii: Materialy Mizhnarod. nauch.-prakt. konf. «Ekonomika staloho rozvytku: teoretychni pidkhody ta praktychni rekomendatsii»], Kosice, Slovakia, pp. 149–150 (ukr)
2. Econometrics [Ekonometriya] (2003). Ed. by A. F. Kabak, O. V. Protsenko. NMTSO-OSEU, Odesa, 562 p. (ukr)
3. Podladchikov, V. N. Microeconomics. Production functions [Mikroekonomika. Proizvodstvennye funktsii], available at: <http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm> (rus)
4. Kazakova, M. V. (2011), «Analysis of the properties of production functions used in the decomposition of economic growth» [Analiz svoystv proizvodstvennykh funktsiy, ispolzemykh pri dekompozitsii ekonomicheskogo rosta], available at: <ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf> (rus)
5. Vitlinskiy, V. V. (2003), Simulation of economy [Modeliuvannia ekonomiky], KNEU, Kyiv, 408 p. available at: <http://fingal.com.ua/content/view/202/39> (ukr)
6. Artemova, A. V., Grishchenko, M. A., Lisnyak, D. V. (2014), Methods of estimating the costs in the production process [Metodika otsenivaniya zatrat pri proizvodstve produktsii], available at: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/piprp\\_2014\\_1\\_3](http://nbuv.gov.ua/UJRN/piprp_2014_1_3). (rus)
7. Bondar, M. V., Mahlay, A. (2014), «Production functions in economic modelling» [Vyrobnychi funktsii v ekonomiko-matematychnomu modeliuvanni], available at: [http://www.rusnauka.com/14\\_ENXXI\\_2014/Matemathics/4\\_169090.doc.htm](http://www.rusnauka.com/14_ENXXI_2014/Matemathics/4_169090.doc.htm) (ukr)
8. Borovskoy, D. N. (2008), Production functions and problem of the choice of economic and mathematical model of active element [Proizvodstvennye funktsii i problema vybora ekonomiko-matematicheskoy modeli aktivnogo elementa], Radio-electronic and computer systems, No. 1 (28), pp. 172–177 (rus)
9. Shumska, S. S. (2007), Production function in economic analysis: theory and practice of using [Vyrobnycha funktsiia v ekonomichnomu analizi: teoriia i praktyka vykorystannia], Economics forecasting, No. 2, pp. 138–153 (ukr)
10. Kmenta, J. (1967), On Estimation of the CES Production Function. International Economic Review, Vol. 8, No. 2, pp. 180–189.
11. Kubiniva, M., Tabata, M., Tabata, S., Hasebe, Y. (1991), Mathematical economics on a personal computer. Ed. by M. Kubiniva. Trans. from Japanese [Matematicheskaya ekonomika na personalnom kompiutere], Finance and Statistics, Moscow, 304 p. (rus)
12. Yankovyi, V. O. (2006), «Prediction of the breakeven investment zone in the baking industry by means of the production function» [Prohnozuvannia zony bezzbytkovosti investytsii u khlibopekarsku promyslovist za dopomohoiu vyrobnychoi funktsii], Socio-economic research bulletin, ONEU, Odessa, No. 22, pp. 410–414 (ukr)